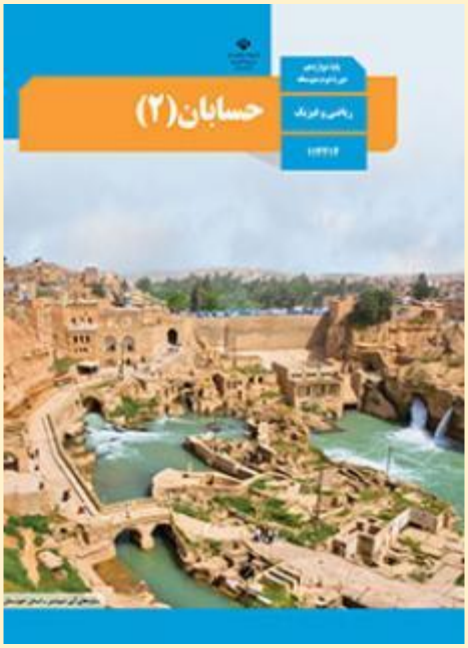
بسمه تعالی

ریاضی ۳

حسابان ۲



گروه آموزشی ریاضی لند

خلاصه فصل تابع

معرفی انواع تابع:

تابع خطی: هر تابع با ضابطه $f(x) = ax + b$ را یک تابع خطی می‌نامیم.

تابع ثابت: در تابع خطی $f(x) = ax + b$ اگر $a = 0$ باشد، $f(x) = b$ را تابع ثابت می‌نامیم.

تابع چند جمله‌ای: تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ که در آن a_i ها اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ است را یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامیم.

تابع درجه ۳: تابع چند جمله‌ای با ضابطه $(a \neq 0)$ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ یک تابع درجه ۳ است.

✍ **نکته:** دامنه توابع چند جمله‌ای، اعداد حقیقی است.

✍ **نکته:** دامنه و برد تابع $y = x^3$ مجموعه اعداد حقیقی است.

تابع صعودی: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ آنگاه f را تابع صعودی می‌نامیم. (اگر $f(x_1) < f(x_2)$ باشد تابع f را اکیداً صعودی می‌نامیم.)

تابع نزولی: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ آنگاه f را تابع نزولی می‌نامیم. (اگر $f(x_1) > f(x_2)$ باشد تابع f را اکیداً نزولی می‌نامیم.)

تابع ثابت: تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم اگر برای تمام مقادیر x در این بازه مقدار f ثابت باشد. تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی است.

تابع یکنوا: تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

تابع مرکب: اگر f و g دو تابع باشند به طوری که اشتراک برد تابع f و دامنه g تهی نباشد، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را تابع مرکب می‌نامیم. به عبارتی:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

دامنه تابع مرکب gof : مجموعه x هایی است که:

۱) x در دامنه f قرار دارد.

۲) $f(x)$ جزء دامنه g باشد.

تبدیل نمودار توابع: قوانین انتقال تابع $y = f(x)$ را به صورت کلی بیان می‌کنیم:

۱) $y = f(x) + b$: نمودار $f(x)$ به اندازه b بالا یا پایین می‌رود.

۲) $y = f(x - a)$: نمودار $f(x)$ به اندازه a به راست یا چپ می‌رود. (اگر a مثبت باشد به راست می‌رود و اگر a منفی باشد به چپ می‌رود.)

۳) $y = k\,f(x)$: برد تابع f در k ضرب می‌شود. اگر $k > ۰$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها منبسط یا منقبض می‌شود. $k > ۱$ منبسط می‌شود و $۰ < k < ۱$ منقبض می‌شود. اگر $k < ۰$، ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می‌شود سپس با ضریب $|k|$ در امتداد محور y ها منبسط یا منقبض می‌شود.

۴) $y = f(kx)$: طول نقاط f در $\frac{۱}{k}$ ضرب می‌شود. اگر $k > ۰$ نمودار f در امتداد محور x ها منبسط یا منقبض می‌شود. اگر $k > ۱$ نمودار f با ضریب $\frac{۱}{k}$ فشرده می‌شود و اگر $۰ < k < ۱$ نمودار f با ضریب $\frac{۱}{k}$ کشیده می‌شود. اگر $k < ۰$ ابتدا نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود سپس با ضریب $\left|\frac{۱}{k}\right|$ منبسط یا منقبض می‌شود.

۵) $y = |f(x)|$: کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و قسمت‌هایی که زیر محور x ها است را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

تابع وارون: اگر تابع $f(x)$ یک به یک یا یکنوا باشد، آنگاه تابع f وارون پذیر است. وارون تابع f را با f^{-1} نشان می‌دهیم. اگر نقطه (a,b) روی نمودار f باشد آنگاه (b,a) روی نمودار تابع f^{-1} قرار خواهد داشت.

ضابطه تابع وارون: برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع، در معادله $y=f(x)$ ابتدا با تبدیل y به x و تبدیل x به y سعی می‌کنیم که با جابه‌جایی عبارتها و عملیات ریاضی، ضابطه‌ای برحسب x به دست آوریم. ضابطه به دست آمده وارون تابع f است.

نکته: برای دو تابع f و g ، اگر داشته باشیم:

$$(fog)(x)=x\ ;\ x\in D_g \quad , \quad (gof)(x)=x\ ;\ x\in D_f$$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

نکته:

$$(f^{-1}og^{-1})(x)=(gof)^{-1}(x)$$

۱. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

ب) در مورد یکنوایی آن‌ها بحث کنید.

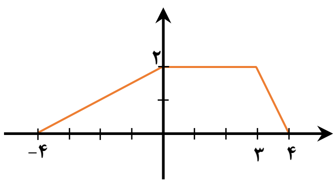
$۱)\ f(x) = (x-۱)^۳ + ۲$

$۲)\ y = ۳^x - ۱$

$$۳)\ y = \begin{cases} x^۲ + ۱ & x > ۰ \\ x & -۱ < x < ۰ \\ |x+۲| & x \leq -۱ \end{cases}$$

۲. آیا توابع $y = x - |x|$ و $y = |x^۲ - ۱|$ یک به یکند؟ (با رسم نمودار)

۳. با استفاده از نمودار تابع نمودار توابع زیر را رسم کنید.



$$y = f\left(\frac{x}{۲}\right) - ۲ \qquad y = -\frac{۱}{۲} f(۴)$$

۴. اگر $A(۲, -۳)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد، متناظر آن روی نمودار $y = \frac{۱}{۳} f(۲x - ۳)$ چه نقطه‌ای است؟

۵. اگر $f = \{(۷,۱۱), (۹,۱), (۳,۴), (۵,۴)\}$ و $g = \{(۱,۳), (۳,۵, (۵,۷), (۷,۹)\}$ دو تابع باشند، تابع fog را مشخص کنید.

۶. اگر $f(x) = \sqrt{۵ - x}$ و $g(x) = \frac{۱}{x^۲ - ۱}$ باشد مطلوبست:

الف) دامنه و ضابطه تابع gof

ب) مقادیر $(fog)(-۲)$ و $(fof)(۱)$

۷. اگر $f(x) = ۳x + ۲$ و $g(x) = x^۲ + x + ۵$ باشد، معادله $(gof)(x) = ۱۷$ را حل کنید.

۸. الف) در تابع $f(x) = ۱ + \sqrt{-۲x}$ مقدار $f^{-۱}(۴)$ را معلوم کنید.

ب) اگر $f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳$ و $g(x) = x^۳$ باشد $(g^{-۱} o f^{-۱})(۵)$ را به دست آورید.

۹. با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = ۲x^۲ - ۴x + ۱$:

الف) وارون تابع را به دست آورید.

ب) برد تابع f را مشخص کنید.

ج) نمودار تابع و وارون آن را رسم کنید.

۱۰. دو تابع $f(x) = \sqrt{۵x + ۹}$ و $g = \{(۳,۶), (۱,۱), (۵,۲), (۷,۳), (۱,۴)\}$ مفروضند. اگر $(f^{-۱} o g^{-۱})(a) = ۸$ باشد، مقدار a را بدست آورید.

خلاصه فصل حد و پیوستگی

یادآوری:

تعریف حد تابع: فرض کنید تابع f در بازه‌ای مانند (a,b) شامل نقطه $x_{\circ}$ (بجز احتمالاً در خود $x_{\circ}$) تعریف شده باشد. حد تابع f در $x_{\circ}$ برابر l است؛ هر گاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد؛ به شرط آنکه x از هر دو طرف راست و چپ به قدر کافی به $x_{\circ}$ نزدیک شود.

$$\lim_{x\to x_{\circ}} f(x) = l$$

تذکر: هرگاه x ها از مقادیر بزرگتر از $x_{\circ}$ به $x_{\circ}$ نزدیک شوند حد راست را بررسی می‌کنیم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to x_{\circ}^{+}} f(x)$$

تذکر: هرگاه x ها از مقادیر کوچکتر از $x_{\circ}$ به $x_{\circ}$ نزدیک شوند حد چپ را بررسی می‌کنیم.

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to x_{\circ}^{-}} f(x)$$

نکته: $\lim_{x\to x_{\circ}} f(x) = l$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to x_{\circ}^{+}} f(x) = l$ و $\lim_{x\to x_{\circ}^{-}} f(x) = l$

قوانین و ویژگی‌های حد:

۱) $\lim_{x\to a} c = c$ 　　　c و a عدد حقیقی‌اند.

۲) $\lim_{x\to a} x = a$

۳) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

۴) $\lim_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

۵) $\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x)$

۶) $$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

ادامه بحث در سال دوازدهم:

قضیه: در تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(x-a)$ باقی مانده تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه: اگر $f(a)$ برابر صفر باشد، آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

تذکر: اگر در محاسبه $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای‌اند، داشته باشیم $P(x)=Q(x)=0$ آنگاه حد این عبارت را به راحتی نمی‌توان محاسبه کرد. برای محاسبه این حد می‌بایست رفع ابهام کنیم. برای این منظور عامل $x-a$ را به روش تجزیه یا تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای در عبارت‌ها می‌یابیم و ساده می‌کنیم. سپس مجدد از قانون تقسیم حدها استفاده می‌کنیم.

تذکر: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

همسایگی: هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.

همسایگی محذوف: اگر بازه (a,b) یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آنگاه مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 نامیده می‌شود.

حد نامتناهی: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطه $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

و رابطه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

حد در بی‌نهایت: اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ به این معناست که به هر مقدار دلخواه می‌توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

نکته:

۱) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{۱}{x^n} = ۰$

۲) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + k) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} ax^n$

خلاصه فصل مشتق

شیب خط: شیب خط از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$m=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

خط مماس بر منحنی در نقطه a : منظور خطی است که از نقطه a (که روی نمودار f قرار دارد) می‌گذرد و بر نمودار مماس است.

شیب خط مماس بر منحنی f : شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $(a\,,f(a))$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{شیب}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

یا

$$\text{شیب}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

نکته: در صورتی که تابع در نقطه a پیوسته باشد اما در فرمول محاسبه شیب خط مماس در این نقطه، حد $+\infty$ یا $-\infty$ شود می‌گوییم خط $x=a$ مماس قائم بر نمودار تابع f است.

تعریف مشتق: اگر نقطه a در دامنه تابع باشد و $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ یا $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وجود داشته باشد، مقدار این حد را مشتق تابع f در نقطه a می‌نامیم و با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق راست و چپ: اگر تابع f در نقطه a تعریف شده باشد، آنگاه:

$$\text{مشتق راست} = f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\text{مشتق چپ} = f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نکته: تابع f در نقطه $x=a$ مشتق پذیر است هرگاه:

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

نکته: اگر تابع f در نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشد آنگاه:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h} = (m-n)f'(a)$$

قوانین محاسبه مشتق:

۱) $f(x)=k \left(\text{عدد ثابت } k\right) \Rightarrow f'(x)=0$

۲) $f(x)=x^n (n\in\mathbb{Q}) \Rightarrow f'(x)=n\,x^{n-1}$

۳) $f(x)=\sqrt{x} \;,\; x>0 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

۴) $f(x)=\sqrt[n]{x^m}$, رادیکال بامعنا باشد $\Rightarrow f'(x)=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$

۵) $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$

۶) $f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=\sin x$

(دو فرمول آخر مربوط به رشته ریاضی است.)

تذکر: اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق پذیر باشند داریم:

$$(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$$

$$(kf)'(a)=kf'(a)$$

$$(f\,g)'(a) = f'(a)\,g(a) + g'(a)\,f(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - g'(a)\,f(a)}{\left(g(a)\right)^{۲}}$$

مشتق تابع مرکب یا قاعده زنجیری: اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x) = g'(x)\,f'\big(g(x)\big)$$

به عبارتی:

اگر f تابع برحسب u و u تابعی از x باشد آنگاه:

$$y = f(u) \quad \Rightarrow \quad y' = u'f'(u)$$

تذکر: آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

دامنه و نمودار تابع مشتق: دامنه تابع مشتق، زیر مجموعه دامنه تابع است. دامنه تابع مشتق، مجموعه همه نقاطی از دامنه تابع است که مشتق در آن نقاط وجود دارد.

بعد از مشخص کردن دامنه تابع مشتق و نقاطی که مشتق وجود ندارد و با توجه به ضابطه مشتق، نمودار را رسم می‌کنیم. به طور مثال نمودار مشتق تابع $y = ax + b$ خط افقی $y = a$ است.