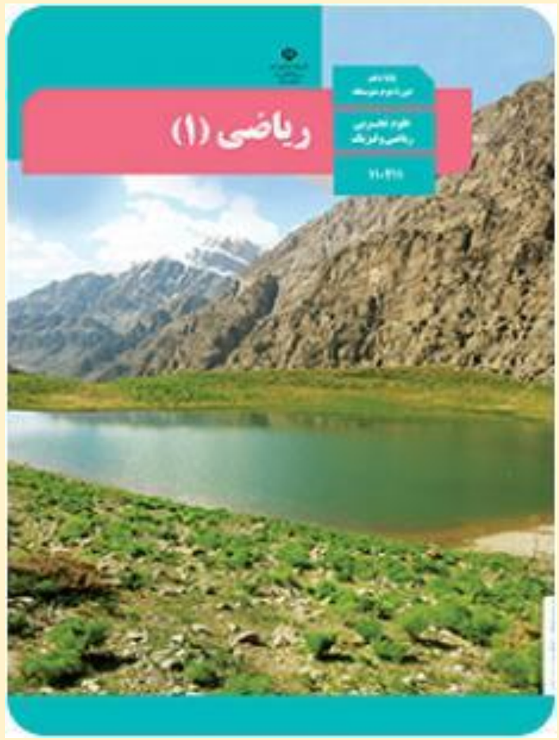
بسمه تعالی



ریاضی۱

گروه آموزشی ریاضی لند

خلاصه فصل معادله و نامعادله

معادله درجه یک: فرم کلی معادله درجه یک بصورت $ax+b=0$ است که a و b اعدادی حقیقی و $a\neq 0$ می‌باشند. جواب معادله به صورت $x=\frac{-b}{a}$ می‌باشد.

معادله درجه دو: فرم کلی معادله درجه دو بصورت ax^2+bx+c است که a و b و c اعدادی حقیقی و $a\neq 0$ می‌باشند. روش‌های حل معادلات درجه دو بصورت زیر است:

۱) روش تجزیه: در این روش ابتدا همه اجزای معادله را به سمت چپ تساوی منتقل کرده و سپس سمت چپ تساوی را پس از ساده شدن، به کمک اتحادها و فاکتورگیری و دسته بندی تجزیه می‌کنیم. سپس با استفاده از نکتهٔ زیر معادله را حل می‌کنیم.

$$A\times B=0 \quad \Rightarrow \quad A=0 \quad \text{یا} \quad B=0$$

تذکر: دقت کنید که هر جزئی از معادله که از یک سمت تساوی به سمت دیگر آن منتقل شود، قرینه می‌شود.

۲) روش ریشه‌گیری: معادله $x^2=k$ که k یک عدد حقیقی نامنفی است را بسادگی می‌توان با ریشه‌گیری از دو طرف حل کرد. جواب‌های معادله بصورت $x=\pm\sqrt{k}$ می‌باشند.

۳) روش مربع کامل: برای حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل مراحل زیر را پشت سر هم انجام می‌دهیم:

۱. اگر ضریب x^2 عددی غیر از یک بود، ابتدا همه معادله را به آن تقسیم می‌کنیم.

۲. دو جمله شامل x و x^2 را در سمت چپ تساوی نگه داشته و جمله‌ای که x ندارد را به سمت راست تساوی منتقل می‌کنیم.

۳. ضریب x را ابتدا به ۲ تقسیم نموده و سپس حاصل را به توان ۲ رسانده و عدد بدست آمده را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

۴. طرف اول را بصورت توان دوم یک دو جمله‌ای (با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای) می‌نویسیم.

۵. از دو طرف جذر می‌گیریم. دقت کنید که بعد از جذر گرفتن، توان ۲ عبارت سمت چپ از بین رفته و در سمت راست دو مقدار با علامت‌های قرینه خواهیم داشت.

۶ . سپس دو معادله بدست آمده را حل کرده و جوابهای معادله را می‌یابیم.

نکته: اگر قبل از مرحله جذرگیری، عدد سمت راست مثبت باشد، معادله دو جواب و اگر عدد سمت راست صفر باشد معادله یک جواب و اگر این عدد منفی باشد معادله جواب ندارد.

۴) روش کلی (دلتا): برای حل معادله ax^2+bx+c به روش کلی مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱. ابتدا همه اجزای معادله را به سمت چپ منتقل کرده و در صورتی که نیاز به ساده شدن داشته باشند این کار را انجام می‌دهیم تا ضرایب معادله مشخص شوند. (a ضریب درجه ۲، b ضریب درجه یک و c عدد ثابت است.)

۲. از فرمول $\Delta=b^2-4ac$ ، مقدار دلتا را محاسبه می‌کنیم.

۳. با استفاده از فرمول $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، مقدار x را می‌یابیم.

نکته: ۱) اگر $\Delta>0$ باشد، معادله دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز است.

۲) اگر $\Delta=0$ باشد، معادله دارای یک ریشه حقیقی است که به آن ریشه مضاعف هم گفته می‌شود.

مقدار این ریشه را می‌توان از رابطه $x=\frac{-b}{2a}$ بدست آورد.

۳) اگر $\Delta<0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

نکته: اگر $\Delta\geq 0$ باشد، معادله دارای ریشه حقیقی است. (یعنی معادله یا یک ریشه حقیقی مضاعف دارد و یا دو ریشه حقیقی متمایز دارد.)

نکته: معادله درجه دومی که ریشه‌های آن α و β هستند را می‌توان از ساده کردن معادله زیر بدست آورد:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دو بدون حل آن:

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $ax^{2}+bx+c$ که $a\neq 0$ است، بدون حل معادله به ترتیب از روابط $S=\frac{-b}{a}$ و $P=\frac{c}{a}$ بدست می‌آیند.

تعیین علامت عبارتهای جبری:

۱) تعیین علامت عبارت درجه یک: برای تعیین علامت عبارت درجه یک $p=ax+b \quad (a\neq 0)$ ، ابتدا عبارت را مساوی صفر قرار داده و ریشه آن را بدست می‌آوریم:

$$ax+b=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{b}{a}$$

سپس جدول تعیین علامت را بصورت زیر تشکیل می‌دهیم:

x		$-\frac{b}{a}$	
p	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

۲) تعیین علامت عبارت درجه دو: برای تعیین علامت عبارت درجه دوم $p=ax^{2}+bx+c \quad (a\neq 0)$ ابتدا عبارت را مساوی صفر قرار داده و برحسب علامت دلتا سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) $\Delta>0$: در این صورت معادله دو ریشه حقیقی متمایز x_1 و x_2 دارد (فرض کنیم x_1 کوچکتر از x_2 باشد):

x		x_1		x_2	
p	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

ب) $\Delta=0$: در این صورت معادله ریشه مضاعف دارد $(x_1=x_2)$:

x		$x_1=x_2$	
p	موافق علامت a	0	موافق علامت a

ج) $\Delta<0$: در این صورت معادله ریشه ندارد:

x	
p	موافق علامت a

نکته: برای تعیین علامت عبارت کسری p که صورت و مخرج آن بصورت حاصل ضرب عبارات درجه یک و دو هستند، کافیست تک تک عبارتها را مساوی صفر قرار داده و ریشه آنها را پیدا کنیم. سپس در سطر اول جدول تعیین علامت، تمام ریشه‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ قرار داده و در ستون سمت چپ، تک تک عبارتهای موجود را بنویسیم. سپس هر عبارت را تعیین علامت کرده و در آخرین سطر برای تعیین علامت عبارت اصلی p ، در هر ستون علامتها را در هم ضرب کرده و علامت حاصل را زیر ستون می‌نویسیم. دقت کنید که صفرهای عبارات موجود در صورت کسر به سطر آخر منتقل شده، اما جاهایی که صفرها متعلق به عبارات موجود در مخرج کسر هستند، از «ت» به معنای «تعریف نشده» به جای صفر استفاده می‌شود.

نکته: عبارات شامل قدر مطلق و پرانتزهای با توان زوج، همواره نامنفی هستند. پس برای تعیین علامت آنها کافیست ریشه آنها را پیدا کنیم و بجز ریشه‌ها همه جا علامت $+$ قرار دهیم.

نکته: برای پرانتزهای با توان فرد، توان آنها را نادیده گرفته و تعیین علامت می‌کنیم.

نامعادلات و حل آنها:

۱) نامعادلات درجه یک: حل نامعادلات درجه یک بدون جدول تعیین علامت امکان پذیر است. حل نامعادله درجه اول $ax+b\geq 0$ را می‌توان در حالت‌های زیر خلاصه کرد:

$$ax+b\geq 0 \quad \Rightarrow \quad ax\geq -b \begin{cases} \xrightarrow{a>0} x\geq -\dfrac{b}{a} \\ \xrightarrow{a<0} x\leq -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

۲) نامعادلات با درجه بالاتر از یک و نامعالات کسری:

در این موارد کافیست همه اجزای نامعادله را به سمت چپ منتقل کرد و در صورت لزوم با انجام عملیات مورد نیاز مانند ضرب، به توان رساندن، مخرج مشترک و ... ، نامعادله را به یکی از حالتهای $p<0$ ، $p\le 0$ ، $p>0$ یا $p\ge 0$ تبدیل کرده و با تعیین علامت عبارت p ، از روی سطر آخر جدول تعیین علامت، جواب نامعادله را بدست آوریم.

۳) نامعادلات دوگانه و دستگاه نامعادلات:

برای حل نامعادله دوگانه $Q(x)\le P(x)\le R(x)$ باید دو نامعادلهٔ $P(x)\le R(x)$ و $Q(x)\le P(x)$ را جداگانه حل کرده و اشتراک جوابها را بدست آوریم. حل دستگاه نامعادلات هم به معنای حل تک تک نامعادلات موجود در دستگاه و پیدا کردن اشتراک جوابها می‌باشد.

۴) نامعادلات قدر مطلقی:

برای حل معادلات و نامعادلات قدر مطلقی از سه رابطه مهم زیر استفاده می‌کنیم:

۱) $|x|=a \quad \Rightarrow \quad x=\pm a$

۲) $|x|\le a \quad \Rightarrow \quad -a\le x\le a$

۳) $|x|\ge a \quad \Rightarrow \quad x\ge a$ یا $x\le -a$

چهار حالت مهم نامعادله درجه دوم:

۱) برای اینکه همواره $ax^2+bx+c>0$ باشد، لازم است $\Delta<0$ و $a>0$ باشد.

۲) برای اینکه همواره $ax^2+bx+c\ge 0$ باشد، لازم است $\Delta\le 0$ و $a>0$ باشد.

۳) برای اینکه همواره $ax^2+bx+c<0$ باشد، لازم است $\Delta<0$ و $a<0$ باشد.

۴) برای اینکه همواره $ax^2+bx+c\le 0$ باشد، لازم است $\Delta\le 0$ و $a<0$ باشد.

۱. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^{۲}+۲x=۶۳$ ب) $(x-۱)^{۲}=\left(۱-\sqrt{۳}\right)^{۲}$

ج) $x^{۵}+x^{۳}+x^{۲}+۱=۰$ د) $۲x^{۲}+\frac{۹}{۱۶}=x$

۲. مجموع دو عدد صحیح ۱۰ است. مجموع مربع‌های این دو عدد ۱۴۸ است. این دو عدد را بیابید.

۳. m را چنان بیابید که معادله $x^{۲}-(۲m-۱)x+m^{۲}=۰$ ریشه مضاعف داشته باشد.

۴. اگر معادله $x^{۲}+(m+۱)x+۴=۰$ دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز باشد، حدود m را بیابید.

۵. عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $p=\frac{(x-۲)^{۲}(x^{۲}-۹)}{|x+۵|(-x+۶)}$ ب) $p=\frac{(۳x-۲)^{۴}(۲x-۳)^{۵}}{(x^{۲}-۱)(x+۵)^{۶}}$

۶. نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $۱<\frac{۲x-۳}{x+۱}<۳$ ب) $\frac{x^{۵}\,|x+۱|}{(x-۱)^{۳}(x+۲)^{۲}}<۰$

۷. دستگاه نامعادلات $\begin{cases}(۵+x)(۲-x)>۰\\ \frac{x-۵}{x-۲}>۰\end{cases}$ را حل کنید .

۸. m را چنان بیابید که به ازای جمیع مقادیر x، عبارت $(m-۱)x^{۲}-۴x+۲m$ منفی باشد.

۹. مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{۲x-۴}{۳x-۲}\right|\geq ۲$ را بیابید.

۱۰. معادله و نامعادله زیر را حل کنید.

الف) $|x^{۲}-۱|=۳$ ب) $|۵x-۳|\leq ۷$

خلاصه فصل تابع

زوج مرتب: دوتایی (a,b) که ترتیب قرار گرفتن a و b در آن اهمیت دارد، زوج مرتب نامیده می‌شود. به a مؤلفه اول و به b مؤلفه دوم گفته می‌شود. یکی از مهمترین مثالهای زوج مرتب، مختصات نقاط در دستگاه محورهای مختصات است.

نکته: زوج مرتب‌های (a,b) و (b,a) با هم برابر نیستند.

نکته: دو زوج مرتب زمانی با هم برابرند که مؤلفه‌های اول آنها با هم و مؤلفه‌های دوم آنها با هم برابر باشند. به عبارت دیگر:

$$(a,b)=(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a=c \ \ , \ \ c=d$$

تعریف رابطه: به هر مجموعه از زوج‌های مرتب، رابطه گفته می‌شود.

تعریف تابع: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای است که در آن به هر عضو A دقیقاً یک عضو B نسبت داده می‌شود.

تعریف تابع به کمک زوج مرتب: رابطه‌ای را تابع می‌گوئیم که در آن هیچ دو زوج مرتبی با مؤلفه‌های اول برابر و مؤلفه‌های دوم نابرابر وجود نداشته باشد.

نکته: اگر در یک رابطه، همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب متفاوت باشند، آن رابطه تابع است. اگر زوج‌های مرتبی با مؤلفه‌های اول یکسان وجود داشته باشند که مؤلفه‌های دوم آنها با هم برابر باشند، باز هم آن رابطه تابع است. اما اگر زوج‌های مرتبی با مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت وجود داشته باشند، آن‌گاه آن رابطه تابع نیست.

تعریف تابع به کمک جدول: یک رابطه که بصورت جدولی بیان شده باشد در صورتی تابع است که مقادیر بالای جدول با هم برابر نباشند و در صورت برابر بودن، مقادیر پایین متناظر با آنها هم برابر باشند.

تعریف تابع به کمک نمودار ون: یک نمودار ون بین دو مجموعه A و B در صورتی تابع را نمایش می‌دهد که در آن از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.

نکته: اگر از یک یا چند مؤلفه از مجموعه A در نمودار پیکانی، پیکان خارج نشده باشد، آن رابطه تابع نیست.

نکته: تعداد پیکان‌های وارد شده به مؤلفه‌های B نقشی در تابع بودن یا نبودن ندارد.

تعریف تابع به کمک نمودار مختصاتی: یک نمودار در صفحه محورهای مختصات در صورتی یک تابع را نمایش می‌دهد که هیچ دو نقطه‌ای از آن روی یک خط موازی محور y ها قرار نگرفته باشند. به عبارت دیگر نموداری تابع است که هر خط موازی محور y ها، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند.

تعریف دامنه و برد: به مجموعه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل دهنده یک تابع، دامنه و به مجموعه مؤلفه‌های دوم، برد گفته می‌شود و آنها را به ترتیب با D و R نمایش می‌دهند.

ضابطه تابع: ضابطه یک تابع بیان کننده قانونی است که بین مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های تشکیل دهنده یک تابع برقرار است. به عبارت دیگر برای تابع f ، $y = f(x)$ ضابطه تابع f نامیده می‌شود.

به عنوان مثال $y = f(x) = ۲x - ۱$ قانون یا ضابطه تابع f را نشان می‌دهد که به کمک آن می‌توان برای هر مقدار x ، y مربوط به آن را بدست آورد.

تابع خطی: اگر ضابطه یک تابع به صورت $f(x) = mx + h$ باشد، به آن تابع خطی گفته می‌شود. واضح است که نمودار یک تابع خطی در دستگاه مختصات، بصورت یک خط است.

نکته: برای رسم یک تابع خطی، کافیست به کمک جدول، ۲ نقطه از آن مشخص کرده و به هم وصل کنیم.

شیب خط: شیب یک خط که از نقاط $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ می‌گذرد برابر است با:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

عرض از مبدأ خط: عرض از مبدأ یک خط برابر است با عرض نقطه تقاطع خط با محور y ها، به عبارت دیگر عرض از مبدأ، عرض نقطه‌ای از خط است که طول آن صفر است.

نکته: برای پیدا کردن ضابطه یک تابع خطی که دو نقطه از آن معلوم است، کافیست فرم کلی تابع خطی را بصورت $f(x) = mx + h$ در نظر گرفته و مختصات آن دو نقطه را در ضابطه تابع صدق دهیم. در اینصورت با حل دستگاه دو معادله دو مجهول بدست آمده می‌توانیم m و h را بدست آورده و ضابطه را مشخص کنیم.

تابع چند جمله‌ای: تابع با ضابطه $f(x) = ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + e$ که $n \in \mathbb{N}$ و $a \neq ۰$ را یک تابع چند جمله‌ای درجه n می‌نامند. مثلاً تابع خطی یک تابع درجه یک و تابع سهمی یک تابع درجه ۲ می‌باشند.

نکته: دامنه همه توابع چند جمله‌ای $\mathbb{R}$ است.

تابع همانی: تابع همانی تابعی است که هر عضو از دامنه را به خودش نظیر می‌کند. ضابطه تابع همانی بصورت $f(x) = x$ است.

نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند، آن تابع لزوماً همانی نیست.

نکته: نمودار هر تابع همانی همواره روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد و در صورتی که دامنه آن $\mathbb{R}$ باشد، نمودارش خود نیمساز ربع اول و سوم خواهد شد.

نکته: یک تابع چند جمله‌ای در صورتی همانی است که ضریب x یک و سایر ضرایب صفر شوند.

تابع ثابت: تابع ثابت تابعی است که همه مقادیر دامنه را به یک مقدار ثابت می‌برد. ضابطه تابع ثابت بصورت $f(x) = k$ که $k \in \mathbb{R}$ می‌باشد.

نکته: برد تابع ثابت همواره تک عضوی است.

نکته: اگر برد یک تابع، فقط یک عضو داشته باشد، آن تابع حتماً یک تابع ثابت است.

نکته: نمودار هر تابع ثابت، همواره روی یک خط موازی محور x ها قرار دارد. اگر دامنه تابع ثابت $\mathbb{R}$ باشد، نمودارش یک خط موازی محور x هاست.

نکته: یک تابع چند جمله‌ای در صورتی ثابت است که همه ضرایب چند جمله‌ای به جز ضریب ثابت آن، صفر شوند.

تابع چند ضابطه‌ای: تابعی که در آن برای محاسبه مقادیر مختلف، از ضابطه‌های مختلف استفاده می‌شود، چند ضابطه‌ای نامیده می‌شود. فرم کلی تابع چند ضابطه‌ای بصورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in D_1 \\ f_2(x) & x\in D_2 \\ \vdots & \\ f_n(x) & x\in D_n \end{cases}$$

رسم توابع چند ضابطه‌ای: برای رسم هر تابع چند ضابطه‌ای کافیست تک تک ضابطه‌ها را با توجه به محدوده‌های مشخص شده برای x در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید. توجه داشته باشید که کنار هر ضابطه، محدودهٔ مجاز x ، ذکر شده است.

نکته: برای یافتن مقدار تابع در تابع‌های چند ضابطه‌ای به ازای x های مختلف، کافیست محدوده مجاز x را از میان محدوده‌هایی که در سمت راست ضابطه‌ها آمده است، بیابیم. سپس از ضابطهٔ متناظر با آن قسمت برای یافتن مقدار تابع استفاده می‌کنیم.

تابع قدر مطلق: به تابع $f(x)=|x|$ تابع قدر مطلق گفته می‌شود. با استفاده از مفهوم قدر مطلق می‌توان f را بصورت زیر تعریف کرد:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & , \quad x\geq 0 \\ -x & , \quad x<0 \end{cases}$$

رسم تابع قدر مطلق به کمک تعریف: برای رسم تابع قدر مطلق به کمک تعریف، باید ابتدا با استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع را به یک تابع چند ضابطه‌ای تبدیل کرده و مطابق آنچه در مورد توابع چند ضابطه‌ای ذکر کردیم، آن را رسم کنیم.

رسم توابع به کمک انتقال:

۱) برای رسم تابع $y=f(x)+k$ کافیست نمودار تابع $y=f(x)$ را در امتداد محور y ها به اندازه k واحد انتقال دهیم. اگر $k>0$ ، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ ، انتقال در جهت منفی انجام می‌شود.

۲) برای رسم تابع $y=f(x+k)$ کافیست نمودار تابع $y=f(x)$ را در امتداد محور x ها به اندازه k واحد انتقال دهیم. اگر $k>0$ ، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ ، انتقال در جهت مثبت انجام می‌شود.

۳) برای رسم نمودار تابع $y = k.f(x)$ کافیست در نمودار تابع $y = f(x)$ ، بدون تغییر x نقاط، مقدار y آن‌ها را در k ضرب کنیم.

۴) برای رسم تابع $y = f(kx)$ کافیست در نمودار $y = f(x)$ ، بدون تغییر y نقاط ، x آن‌ها را بر k تقسیم کنیم.

۵) برای رسم تابع $y = -f(x)$ کافیست نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

۶) برای رسم تابع $y = f(-x)$ کافیست نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

۱. اگر f یک تابع خطی باشد که $f(۲)=۳$ و $f(۳)=۵$ ، مقدار $f(۶)$ را بیابید.

۲. تابع خطی $f(x)=۲-x$ را با دامنهٔ $D=[-۲,۳)$ در نظر بگیرید.

الف) تابع خطی f را رسم کنید.

ب) برد f را بیابید.

۳. به ازای چه مقادیری از m ، رابطه زیر تابع است؟

$$f=\left\{(۱,m^۳-۴m),\left(\frac{m}{۲},۲\right),(۱,۰),(۰,۳),(۳m,۲)\right\}$$

۴. تابع‌های $f(x)=x^۲-۳$ و $g(x)=\frac{x-۱}{۳}$ را در نظر بگیرید. موارد زیر را بیابید:

الف) $۲f(۱)-g(۴)$

ب) $g(f(۰))$

۵. اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(a-b^۲)x+۲b$ یک تابع ثابت باشد که $f(-۱)=-۲$.

a و b را بیابید.

۶. اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۳x+(a+b)x+a-۲$ یک تابع همانی باشد، a و b را بیابید.

۷. تابع چند ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ & x\geq ۰ \\ ۱ & -۲\leq x<۰ \\ ۱+x & x<-۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

ب) دامنه و برد آن را بیابید.

ج) مقدارهای $f(۰)$ ، $f(-۱)$ و $f(-\frac{۵}{۲})$ را بیابید.

۸. نمودار تابع $f(x)=|۲x+۳|$ را به کمک تعریف قدر مطلق رسم کنید.

۹. نمودار $y=-|x+۲|-۳$ را به کمک انتقال رسم کنید.

۱۰. اگر f یک تابع چند جمله‌ای درجه ۲ باشد که $f(۰)=۱$ ، $f(۱)=۲$ و $f(-۱)=۴$ می‌باشد. مقدار $f(۲)$ کدام است؟

خلاصه فصل شمارش

اصل جمع: اگر بتوان کاری را به دو روش انجام داد بطوری که در روش اول، m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام این کار، $m+n$ روش وجود دارد.

اصل ضرب: اگر انجام کاری منوط به انجام دو مرحله باشد بطوری که برای انجام مرحله اول m روش و برای انجام مرحله دوم n روش وجود داشته باشد، آن‌گاه برای انجام این کار $m \times n$ روش وجود دارد.

نکته: در بعضی موارد برای شمارش حالتهای مطلوب، باید حالتهای نامطلوب را محاسبه کرده و از کل حالتها کم کنیم (به این کار شیوهٔ متمم گفته می‌شود).

فاکتوریل: برای هر عدد طبیعی n، $n!$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$n! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times n$$

قرارداد: $۰! = ۱$

نکته:

$$n! = n(n-۱)! = n(n-۱)(n-۲)! = \cdots$$
$$(n+m)! \neq n! + m!$$
$$(n-m)! \neq n! - m!$$
$$(n \times m)! \neq n! \times m!$$

جایگشت: به حالتهای مختلف کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز، جایگشت‌های n شیء گفته می‌شود. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$.

جایگشت‌های با تکرار: اگر در میان n شیء، r شیء شبیه هم وجود داشته باشد، تعداد جایگشت‌های این n شیء برابر است با $\frac{n!}{r!}$.

نکته: اگر n شیء داشته باشیم که $m_۱$ تای آنها از نوع اول، $m_۲$ تای آنها از نوع دوم، ... m_k تای آنها از نوع k ام باشد و $n = m_۱ + m_۲ + \cdots + m_k$، آن گاه تعداد جایگشت‌های آنها برابر است با $\frac{n!}{m_۱! m_۲! \ldots m_k!}$

نکته: جایگشت‌های n شیء بطور دایره‌ای برابر است با $(n-۱)!$

جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز: تعداد جایگشت‌های r تایی از میان n شیء متمایز را با $p(n,r)$ نمایش داده و از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

به فرمول فوق، ترتیب r از n هم گفته می‌شود.

ترکیب: به انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب مهم نباشد، ترکیب r شیء از n شیء متمایز گفته می‌شود و با $c(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش داده و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$c(n,r)=\frac{n!}{(n-۱)!\,r!}$$

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$. پس می‌توان نوشت:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n-۱}+\binom{n}{n}=۲^n$$

خواص مهم ترکیب:

۱) $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$

۲) $\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n$

۳) $\binom{n}{۲}=\binom{n}{n-۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$

۴) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

۵) $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+۱}=\binom{n+۱}{r+۱}$

رابطه ترکیب و ترتیب:

$$p(n,r)=c(n,r)\times r!$$

۱. با ارقام ۷ ، ۶ ، ۴ ، ۳ ، ۰

الف) چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد ۴ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

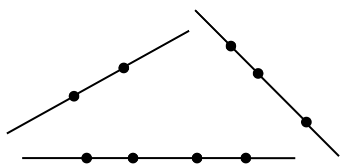
۲. یک آزمون تستی شامل ۶ سؤال ۵ گزینه‌ای و ۴ سؤال ۲ گزینه‌ای می‌باشد. دانش‌آموزی می‌خواهد به صورت تصادفی به این سؤالات پاسخ دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:

الف) او مجبور باشد به تمام سؤالات پاسخ دهد.

ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد.

۳. با حروف کلمه «گردش نما» چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که شامل دو حرف «گ» و «ش» باشند؟

۴. با نقاط شکل مقابل چند مثلث می‌توان ساخت؟



۵. مجموعه $A = \{۱ , ۲ , ... , ۱۰\}$ چند زیر مجموعه ناتهی دارد که فقط شامل اعداد فرد باشد؟

۶. به چند طرق می‌توان یک تیم ۶ نفره از بین ۷ معلم و ۸ دانش‌آموز انتخاب کرد اگر:

الف) تیم شامل ۴ دانش‌آموز و ۲ معلم باشد؟

ب) تیم شامل حداقل ۴ دانش‌آموز باشد؟

ج) تیم شامل حداکثر ۳ معلم باشد؟

۷. مجموعه $A = \{a , b , c , d , e , f\}$،

الف) چند زیر مجموعه ۴ عضوی فاقد عضو a دارد؟

ب) چند زیر مجموعه ۵ عضوی شامل عضو d دارد؟

۸. با حروف کلمه «پرونده»،

الف) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که شامل حرف «پ» باشد؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که شامل عبارت «ند» باشد؟

۹. با استفاده از سه رنگ آبی، قرمز و سبز، به چند روش می‌توان خانه‌های شکل زیر را رنگ کرد بطوری که:

الف) خانه‌های مجاور همرنگ نباشند.

ب) خانه‌های اول و آخر همرنگ باشند.

۱۰. مجموعه‌های $A = \{۲,۴,۷,۸,۹\}$ و $B = \{۱,۳,۷,۱۰,۱۲,۱۳\}$ مفروضند:

الف) چند تابع از A به B می‌توان نوشت که شامل زوج‌های مرتب $(۲,۳)$ و $(۷,۷)$ باشند؟

ب) چند تابع از A به B می‌توان نوشت که شامل $(۴,۱۰)$ بوده ولی فاقد $(۲,۱)$ و $(۸,۱۲)$ باشند؟

خلاصه فصل آمار و احتمال

پدیده تصادفی: اتفاق یا پدیده‌ای که قبل از وقوع آن، نتوان راجع به نتیجه آن با قطع و یقین صحبت کرد، پدیده تصادفی می‌نامند.

فضای نمونه‌ای: مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای گفته و معمولاً با S نمایش می‌دهند.

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد تصادفی یا بطور خلاصه یک پیشامد می‌نامند.

پیشامد $A \cup B$: اگر A و B دو پیشامد باشند به $A \cup B$ پیشامد اجتماع A و B گفته می‌شود و زمانی رخ می‌دهد که حداقل یکی از A یا B رخ بدهد.

پیشامد $A \cap B$: اگر A و B دو پیشامد باشند به $A \cap B$ پیشامد اشتراک A و B گفته می‌شود و زمانی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B با هم اتفاق بیفتند.

پیشامد $A - B$: اگر A و B دو پیشامد باشند به $A - B$ پیشامد تفاضل B از A گفته می‌شود و زمانی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد.

پیشامد A' : برای هر پیشامد A ، به A' متمم A گفته می‌شود و زمانی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

احتمال پیشامد A : احتمال رخ دادن پیشامد A برابر است با نسبت تعداد اعضای A به تعداد اعضای فضای نمونه‌ای:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

نکته: برای هر پیشامد $A \subseteq S$ ، $۰ \leq P(A) \leq ۱$ است:

۱) اگر $A = \emptyset$ آنگاه $P(\emptyset) = ۰$

۲) اگر $A = S$ آنگاه $P(S) = ۱$

۳) اگر $A \subset B$ و $A \neq \emptyset , S$ آنگاه $۰ < P(A) < ۱$

احتمال اجتماع دو پیشامد: برای دو پیشامد A و B داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

نکته: اگر A و B ناسازگار باشند (یعنی $A\cap B=\emptyset$) داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

نکته: برای دو پیشامد A و B داریم:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

نکته: برای هر پیشامد A و متمم آن A' داریم:

$$P(A)+P(A')=١$$

آمار: مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار: مجموعه‌ای از روش‌ها شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌باشد.

جامعه یا جمعیت: به مجموعه تمام افراد یا اشیائی که در مورد یک یا چند ویژگی از آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد، جامعه یا جمعیت گفته می‌شود. به هر یک از افراد یا اشیاء یک عضو جامعه گفته می‌شود.

نمونه: به بخشی از جامعه که برای مطالعه و تحقیق انتخاب می‌شوند، نمونه گفته می‌شود و به هر یک از افراد یا اشیاء انتخاب شده عضو نمونه می‌گویند.

حجم جامعه و نمونه: به تعداد اعضای جامعه، اندازه یا حجم جامعه و به تعداد اعضای نمونه، اندازه یا حجم نمونه گفته می‌شود.

متغیر: یک ویژگی از اعضای یک جامعه است که مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. عددی که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گویند.

متغیر کمی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری هستند متغیرهای کمی می‌گویند.

متغیر کیفی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند متغیرهای کیفی می‌گویند.

متغیر کمی پیوسته: متغیر کمی است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند.

متغیر کمی گسسته: متغیر کمی که پیوسته نباشد را گسسته می‌گویند. این متغیرها معمولاً از نوع تعداد هستند.

متغیر کیفی ترتیبی: متغیر کیفی است که در آن نوعی ترتیب طبیعی و منطقی وجود داشته باشد.

متغیر کیفی اسمی: متغیر کیفی که ترتیبی نباشد را اسمی می‌گویند.

۱. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوبست:

الف) پیشامد A که در آن تفاضل اعداد دو تاس برابر ۴ شود.

ب) پیشامد B که در آن تاس اول کمتر از ۴ و تاس دوم مضرب ۳ باشد.

ج) پیشامد C که در آن تاس اول بیشتر از ۴ یا تاس دوم مضرب ۳ باشد.

۲. سه پیشامد A ، B و C را از فضای نمونه‌ای S در نظر گرفته و هر کدام از پیشامدهای زیر را به زبان ریاضی نوشته و در نمودار ون نمایش دهید.

الف) A و B اتفاق بیفتد ولی C اتفاق نیفتد.

ب) A یا B اتفاق بیفتد ولی C اتفاق نیفتد.

۳. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که:

الف) حداقل یکی ۳ بیاید.

ب) مجموع دو تاس فرد باشد.

ج) دو تاس اعداد متوالی بیایند.

۴. کیسه‌ای شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. ۲ مهره بصورت تصادفی از کیسه خارج می‌کنیم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) مهره‌ها سفید باشند.

ب) مهره‌ها همرنگ باشند.

ج) مهره‌ها همرنگ نباشند.

د) یکی سفید و یکی سیاه باشد.

۵. در یک شهر ۲۵ درصد از مردم، روزنامهٔ A و ۳۰ درصد روزنامه B و ۴۵ درصد یکی از این دو روزنامه را مطالعه می‌کنند. اگر یک نفر از این جامعه را به تصادف انتخاب کنیم، مطلوبست احتمال آن که:

الف) هر دو روزنامه را مطالعه کند.

ب) فقط روزنامه B را مطالعه کند.

۶. اگر $P(A\cup B)=\frac{۳}{۴}$ ، $P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B')=\frac{۳}{۸}$ باشند. مطلوبست:

۱) $P(A)=$

۲) $P(B-A)=$

۳) $P(A-B)=$

۷. سه کتاب فیزیک متمایز و ۴ کتاب شیمی متفاوت را به تصادف در یک قفسه کنار هم قرار می‌دهیم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند.

ب) کتاب‌های شیمی کنار هم نباشند.

ج) کتاب‌های فیزیک و شیمی یک در میان قرار بگیرند.

۸. برای بررسی قد افراد یک شهر با جمعیت ۵۰۰,۰۰۰ نفر، تعداد ۲۰,۰۰۰ نفر از افراد این شهر را به تصادف انتخاب کرده و قد آنها را بررسی می‌کنیم. جدول زیر را کامل کنید.

جامعه	اندازه جامعه	نمونه	اندازه نمونه	ویژگی مورد بررسی

۹. نوع متغیرهای زیر را بطور کامل مشخص کنید.

الف) رنگ موی افراد

ب) تعداد کتابهای موجود در یک کتابخانه

ج) میزان مصرف بنزین اتومبیل‌ها برحسب لیتر

د) میزان رضایت مشتریان یک بانک (عالی / متوسط / کم)

۱۰. تفاوت آمار و علم آمار را بیان کنید.