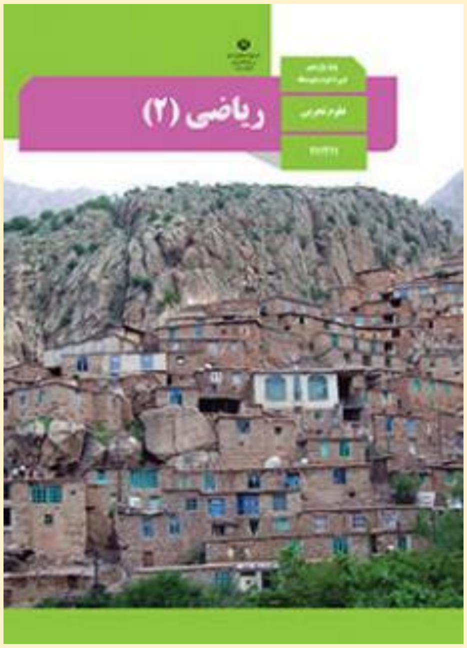
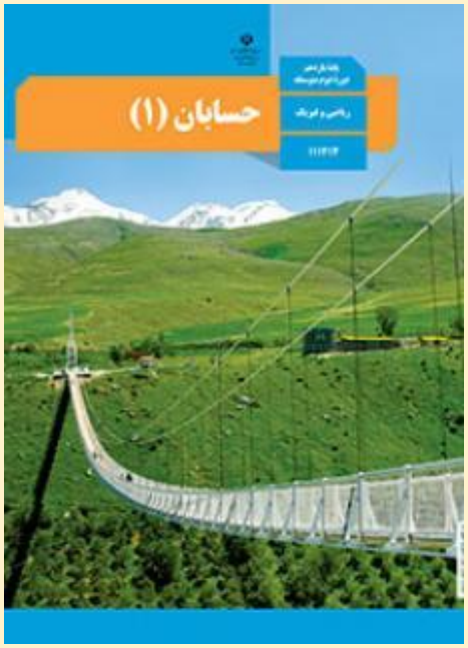
بسمه تعالی



ریاضی ۲

حسابان ۱



گروه آموزشی ریاضی لند

خلاصه فصل تابع

ضابطه تابع: به دستور یا قانون بیانگر تابع، ضابطه تابع می‌گوییم. به مجموعه ورودی‌های تابع، دامنه تابع و به مجموعه خروجی‌های تابع، برد تابع می‌گوییم.

توابع گویا: هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم که در آن صورت و مخرج چند جمله‌ای هستند و مخرج مخالف صفر است.

✍ **نکته:** برای مشخص کردن دامنه تابع گویا، ابتدا مخرج را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های مخرج را معلوم می‌کنیم. سپس این ریشه‌ها را از اعداد حقیقی کم می‌کنیم.

$D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

✍ **نکته:** تابع $y=\frac{۱}{x}$ دارای دو مجانب عمودی $x=۰$ و مجانب افقی $y=۰$ است. این تابع اکیداً یکنوا است.

دو تابع مساوی: توابع f و g را برابر می‌نامیم هرگاه دامنه دو تابع با هم برابر باشد و برای هر x از دامنه یکسان دو تابع: $f(x)=g(x)$

توابع رادیکالی: توابع به شکل $y=\sqrt{f(x)}$ را تابع رادیکالی می‌نامیم.

✍ **نکته:** برای مشخص کردن دامنه تابع رادیکالی عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم و نامعادله ایجاد شده را حل می‌کنیم و حدود x را به دست می‌آوریم.

تابع جزء صحیح: تابع جزء صحیح یا براکت به هر عدد صحیح خود آن عدد را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچکتر از آن عدد را نسبت می‌دهد. ضابطه تابع: $y=[x]$

وارون تابع f: با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a,b) می‌توان زوج مرتب (b,a) را به دست آورد. اگر همه مؤلفه‌های (a,b) تابع f را جابه‌جا کنیم رابطه جدیدی به دست می‌آید که وارون تابع f می‌نامیم و با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم. رابطه $f^{-۱}$ ممکن است تابع نباشد.

رسم نمودار وارون یک تابع: برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینه نقاط نمودار تابع را نسبت به خط نیمساز $y = x$ رسم کنیم.

تابع یک به یک: در ضابطه تابع، اگر مؤلفه‌های دوم تابع تکراری نباشد، به آن تابع یک به یک می‌گوییم.

نکته: برای تشخیص یک به یک بودن تابع از روی نمودار آن، کافی است خط‌هایی موازی محور x ها رسم کنیم. اگر این خط‌ها نمودار f را فقط در یک نقطه قطع کنند، تابع f یک به یک است.

نکته: برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون، ابتدا با تبدیل x به y و y به x تغییر متغییر می‌دهیم. سپس با جابه‌جایی عبارات و عملیات ریاضی سعی می‌کنیم که یک ضابطه بر حسب x جدید به دست آوریم. ضابطه به دست آمده وارون تابع f است.

اعمال جبری روی توابع: اگر f و g به ترتیب دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند. برای عضوهای مشترک دامنه f و g توابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

و برای عضوهای مشترک دامنه f و g که ریشه‌های g را از آن برداشته باشیم تعریف می‌کنیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

انتقال تابع $f(x)$: برای انتقال تابع f به نکات زیر توجه کنید:

۱) $y = f(x) + b$: نمودار f به اندازه b بالا یا پایین می‌رود. اگر b مثبت باشد بالا می‌رود و اگر منفی باشد پایین می‌رود.

۲) $y = f(x - a)$: نمودار f به اندازه a (اگر مثبت باشد) به راست می‌رود و به اندازه a (اگر منفی باشد) به چپ می‌رود.

۳) $y = k\, f(x)$: عرض نقاط تابع f یا برد تابع در k ضرب می‌شود.

۴) $y = -f(x)$: قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم.

۱. دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $f(x)=\dfrac{x+۱}{۲x^{۲}-۳x-۲}$ ۲) $f(x)=\sqrt{-۲x+۶}$

۳) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{۵x-۱۰}$ ۴) $f(x)=۲[x]-۴$

۵) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-۴}{۱-x^{۲}}}$ ۶) $f(x)=\dfrac{\sqrt{۳x}}{\sqrt{x+۳}}$

۲. در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

۱) $f(x)=۲x-۳$, $g(x)=\dfrac{۴x+۶}{۴x^{۲}-۹}$

۲) $f(x)=\sqrt{x}\,\sqrt{x-۱}$, $g(x)=\sqrt{x^{۲}-x}$

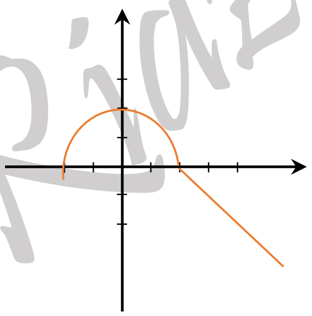
۳. با تعیین دامنه توابع زیر، نمودار آن‌ها را رسم کنید.

۱) $f(x)=\dfrac{۱}{x-۱}$ ۲) $g(x)=۱+\sqrt{۳-x}$

۴. توابع داده شده را در بازه $[-۳,۴)$ رسم کنید.

۱) $h(x)=۲[x]-۱$ ۲) $k(x)=۱+\sqrt{۳-x}$

۵. نمودار تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید:



الف) در کدام بازه یک به یک است؟

ب) آیا می‌توانید نمودار وارون تابع را رسم کنید.

۶. تابع $f(x)=\dfrac{۱}{۲x-a}$ را در بازه $(-\infty,۱)$ اکیداً نزولی است.

الف) مقدار a را مشخص کنید.

ب) ضابطه وارون تابع را مشخص کنید.

۷. با کمک انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y=۱-\sqrt{x}$ ۲) $y=\sqrt{x-۱}+۲$

۸. نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو است:

نمودار توابع $y=f(x-۱)$ و $y=-۲f(x)$ را رسم کنید.

۹. اگر $f=\{(-۱,۳),(۲,۴),(۵,۰),(-۲,۱)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x+۳}$ باشد:

الف) تابع $f+g$ را به دست آورید.

ب) مقدار $\frac{f-g}{۲f}(۲)$ را معلوم کنید.

۱۰. دو تابع $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\frac{۱-x}{x+۲}$ را در نظر بگیرید:

الف) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را مشخص کنید.

ب) ضابطه تابع $f\times g$ را به دست آورید.

ج) مقدار $g\big(f(۲)\big)$ چقدر است؟

خلاصه فصل تابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی: هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ که در آن $a \in \mathbb{R}$ و $a > 0$ و $a \neq 0$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

نکته: اگر $a > 1$ باشد تابع افزایشی یا صعودی است. اگر $0 < a < 1$ باشد تابع کاهشی یا نزولی است.

ویژگی‌های تابع نمایی:

۱) محور y ها را در $(0,1)$ قطع می‌کند.

۲) دامنه آن اعداد حقیقی و برد آن $(0, +\infty)$ است.

۳) محور x ها را قطع نمی‌کند. (مجانب افقی)

۴) نمودار تابع $y = a^x$ وقتی $a > 1$ است قرینه نمودار تابع $y = a^x$ وقتی $0 < a < 1$ است، می‌باشد. (قرینه نسبت به محور y ها)

معادله نمایی: معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادله نمایی می‌نامند.

تذکر: برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک به یکی تابع نمایی استفاده می‌شود.

$$a^x = a^y \quad \Rightarrow \quad x = y$$

نامعادله نمایی: در حل نامعادله‌های نمایی نیز از خاصیت یک به یکی استفاده می‌کنیم، اما به صعودی یا نزولی بودن تابع دقت می‌کنیم.

۱) اگر $a > 1$ و $a^x > a^y$ آنگاه $x > y$. (صعودی)

۲) اگر $0 < a < 1$ و $a^x > a^y$ آنگاه $x < y$. (نزولی)

تابع لگاریتم: وارون تابع نمایی $y = a^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = log_a x$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم لگاریتم x در مبنای a.

برای هر $a \neq ۱$ و $a > ۰$ داریم: $f(x) = a^x \quad \Leftrightarrow \quad f^{-۱}(x) = \log_a x$

نکته: اگر $a > ۱$ باشد تابع افزایشی و اگر $۰ < a < ۱$ باشد تابع کاهشی است.

ویژگی‌های تابع لگاریتم:

۱) محور x ها را در نقطه $(۱,۰)$ قطع می‌کند.

۲) دامنه آن $(۰, +\infty)$ و برد آن اعداد حقیقی است.

۳) محور y ها را قطع نمی‌کند. (مجانب عمودی یا قائم)

۴) با وارون کردن نمودار تابع نمایی $y = a^x$ نسبت به خط $y = x$ نمودار تابع لگاریتم $y = \log_a x$ به دست می‌آید.

تذکر: اگر مبنای لگاریتم عدد ۱۰ باشد، آن را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت مبنای ۱۰ نوشته نمی‌شود. یعنی به جای $\log_{۱۰} x$ می‌نویسیم $\log x$.

ویژگی‌ها و قوانین لگاریتم:

۱) $\log_a ۱ = ۰ \quad , \quad \log_a a = ۱ \quad , \quad \log\left(\frac{۱}{a}\right) = -۱$

۲) $\log_a x^n = n \log_a x$

۳) $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$

۴) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

۵) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

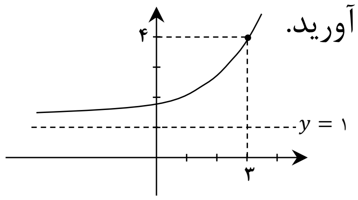
۶) $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$

۷) $\log_a a^x = x \quad , \quad a^{\log_a x} = x$

معادلات لگاریتمی: در حل معادله‌های لگاریتمی از خاصیت یک به یک بودن تابع لگاریتم استفاده می‌کنیم. از تساوی $\log_a x = \log_a y$ (وقتی $x, y > ۰$) می‌توان نتیجه گرفت $x = y$.

۱. به ازای چند مقدار طبیعی a، تابع با ضابطه $y=(۴-a^{۲})^{x}$ نمایی است؟

۲. شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $y=a+۳^{(x+b)}$ است. $a+b$ را به دست آورید.



۳. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$۱)\ y=۲^{x}-۱$ $\quad$ $۲)\ y=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{x}+۲$ $\quad$ $۳)\ y=-۲^{x-۱}+۱$

۴. نمودار تابع با ضابطه $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $۲^{-\sqrt{۲}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.

۵. معادله‌های نمایی زیر را حل کنید.

$۱)\ ۵^{۲x+۱}=\frac{۱}{۲۵}\times(۱۲۵)^{x}$ $\quad$ $۲)\ ۲^{۳x-۲}=\frac{۱}{۳۲^{۳}}$

۶. مجموعه جواب نامعادله $۳^{۲x+۵}>۳^{۳x-۴}$ را معلوم کنید.

۷. دامنه توابع زیر را به دست آورید.

$۱)\ y=log\frac{x-۱}{x+۲}$ $\quad$ $۲)\ y=\log(۱-x)+۲$

۸. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$۱)\ y=log_{۲}(x+۱)$ $\quad$ $۲)\ y=-log_{\frac{۱}{۲}}(x+۲)$

۹. با فرض $log\ ۲=۰/۳$ و $log\ ۳=۰/۴$ باشد. مقادیر زیر را بدست آورید.

$۱)\ y=log\ ۲\sqrt{۳}$ $\quad$ $۲)\ y=log\frac{۱۵}{\sqrt{۲۷}}$

۱۰. معادلات زیر را حل کنید.

$۱)\ log_{۲}(۲x-۱)-۱=۲$

$۲)\ log_{۳}۲x+log_{۳}(۱-x)=۲+log_{۳}x$

$۳)\ log_{۲}\left(log_{۳}\sqrt{\sqrt[۳]{x}}\right)=-۱$

خلاصه فصل حد و پیوستگی

تعریف حد تابع: فرض کنید تابع f در بازه‌ای مانند (a,b) شامل نقطه x_0 (بجز احتمالاً در خود x_0) تعریف شده باشد. حد تابع f در x_0 برابر l است؛ هر گاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد؛ به شرط آنکه x از هر دو طرف راست و چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

تذکر: هرگاه x ها از مقادیر بزرگتر از x_0 به x_0 نزدیک شوند حد راست را بررسی می‌کنیم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

تذکر: هرگاه x ها از مقادیر کوچکتر از x_0 به x_0 نزدیک شوند حد چپ را بررسی می‌کنیم.

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

نکته: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ اگر و تنها اگر $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ و $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

نکته: به طور کلی اگر داشته باشیم $\lim_{x \to a} f(x) = l$ یکی از حالت های زیر اتفاق می افتد:

الف) $f(a)$ موجود نیست.

ب) $f(a)$ موجود است ولی با حد برابر نیست.

ج) $f(a)$ موجود و با حد برابر است.

قوانین و ویژگی‌های حد:

a و c عدد حقیقی‌اند.

۱) $\lim_{x \to a} c = c$

۲) $\lim_{x \to a} x = a$

۳) $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

۴) $\lim_{x \to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

۵) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) . \lim\limits_{x\to a} g(x)$

۶) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

تذکر: به طور کلی حد یک تابع چندجمله ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

تذکر: اگر در محاسبه $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای‌اند، داشته باشیم $P(x) = Q(x) = ۰$ آنگاه حد این عبارت را به راحتی نمی‌توان محاسبه کرد. برای محاسبه این حد می‌بایست رفع ابهام کنیم. برای این منظور عامل $x - a$ را به روش تجزیه یا تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای در عبارت‌ها می‌یابیم و ساده می‌کنیم. سپس مجدد از قانون تقسیم حدها استفاده می‌کنیم.

نتیجه: اگر $f(a)$ برابر صفر باشد، آنگاه $f(x)$ بر $(x - a)$ بخش‌پذیر است.

ادامه قوانین حد :

$$\mathrm{Lim}_{x\to c}\sqrt{ax+b} = \sqrt{\lim\limits_{x\to c} ax + b} = \sqrt{l}$$

$$\lim\limits_{x\to \alpha} cosx = cos\alpha \quad , \quad \lim\limits_{x\to \alpha} sinx = sin\alpha$$

پیوستگی: تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته گوییم هرگاه:

الف) $f(c)$ موجود باشد.

ب) تابع در نقطه c حد داشته باشد.

ج) مقدار تابع با حد تابع در این نقطه برابر باشد.

$$\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$$

پیوستگی راست: تابع f در نقطه $x = c$ از طرف راست پیوسته گوییم هرگاه حد راست تابع با مقدار تابع

برابر باشد.

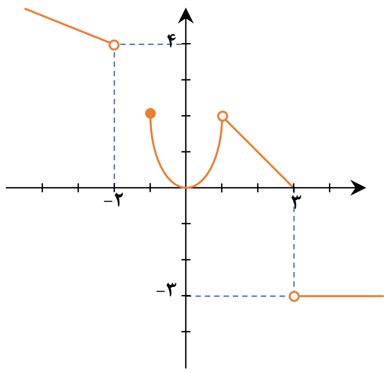
پیوستگی چپ: تابع f در نقطه $x = c$ از طرف چپ پیوسته گوییم هرگاه حد چپ تابع با مقدار تابع برابر باشد.

پیوستگی روی یک بازه:

- تابع f در بازه (a, b) پیوسته است هرگاه در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.
- تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته است هرگاه در همه نقاط از این بازه به جز $a\ ,b$ پیوسته باشد و در نقطه $x = a$ پیوسته راست و در نقطه $x = b$ پیوسته چپ باشد.

نکته: اگر $D_f = \mathbb{R}$ و تابع در هر نقطه از دامنه اش پیوسته باشد می گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است.

۱. با توجه به نمودار زیر مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



۱) $f(۰) =$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) =$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) =$

۴) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) =$

۵) $\lim\limits_{x\to -۲^-} f(x) =$

۶) $f(-۱) =$

۷) $f(۲) =$

۸) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x) =$

۲. نمودار تابع با ضابطه زیر را رسم کنید و حد تابع در نقطه صفر را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x+۲ & x\geq ۰ \\ x^۲+۱ & x<۰ \end{cases}$$

۳. حد تابع زیر را در نقاط ۱ و ۲- و ۳ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} |x-۲| & x\leq ۱ \\ \dfrac{۲-x}{x+۱} & x>۱ \end{cases}$$

۴. مثالی از یک تابع همراه با نمودار آن ارائه کنید که:

الف) حد تابع در نقطه ۳ برابر ۱- باشد.

ب) تابع در نقطه ۲- حد نداشته باشد.

ج) تابع در نقطه ۰ تعریف نشده باشد ولی $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۲$.

۵. حدهای زیر را به دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۱}(۴x-۲) =$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱^-}\sqrt{۴-۳x} =$

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}}\cos ۲x =$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x}{x+۲} =$

۵) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{[x]}{x-۳} =$

۶) $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۲}^+}(۲\sin x-\cos x) =$

۶ . حدهای زیر را به دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{2x+4} =$

۲) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{x-x^2} =$

۴) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^3+1} =$

۵) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos x+1}{\cos^2 x-1} =$

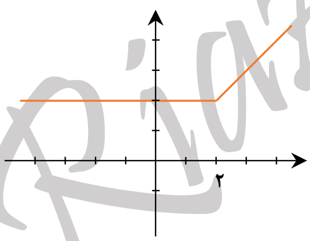
۷. نمودار تابع زیر را رسم کنید. در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases} 3+x & x>2 \\ 5 & 0<x<2 \\ 1-x & x<0 \end{cases}$$

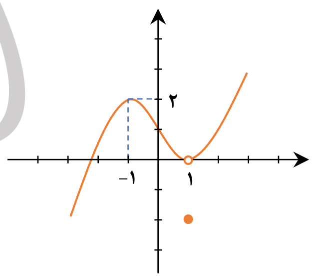
۸ . پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} \sin x & x>\dfrac{\pi}{2} \\ 1 & x\le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ را در $x=\dfrac{\pi}{2}$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

۹. پیوستگی تابع را در توابع زیر بررسی کنید.

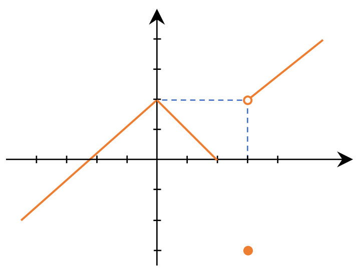
(۱)



(۲)



(۳)



۱۰. در سوال بالا قسمت (۳) پیوستگی تابع را در بازه $(-\infty, 0]$ و $[0, 2]$ و $[3, +\infty)$ بررسی کنید.

خلاصه فصل آمار و احتمال

یادآوری:

پدیده تصادفی: پدیده یا آزمایشی است که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش‌بینی کرد.

فضای نمونه‌ای: مجموعه نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و با S نشان می‌دهیم.

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.

متمم یک پیشامد: پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم هر گاه A و B با هم رخ ندهند، یعنی $A \cap B = \emptyset$.

✍ **نکته:** وقتی یک از پیشامدهای A یا B رخ می‌دهد و نه هر دو، پیشامد $(A-B) \cup (B-A)$ را نشان می‌دهند.

قوانین و ویژگی‌های احتمال:

۱) $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

۲) $P(A') = ۱ - P(A) \quad , \quad P(S) = ۱ \quad , \quad P(\emptyset) = ۰$

۳) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

✍ **تذکر:** $(A \cap B)' = A' \cup B' \quad , \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$

ادامه مبحث در سال یازدهم:

احتمال A به شرط B: احتمال وقوع پیشامد A است به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است. $P(A \mid B)$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B) \neq ۰$$

پیشامدهای مستقل: پیشامد A از پیشامد B مستقل است هرگاه وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیر نگذارد. به عبارتی دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هر گاه وقوع هر یک بر وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B)$$

آمار توصیفی: به خلاصه سازی داده‌ها در قالب نمودار، جدول و یا شاخص‌هایی در قالب معیارهای گرایش به مرکز و معیارهای پراکندگی می‌پردازد.

معیارهای گرایش به مرکز: معمولاً سعی می‌شود دانسته‌های نهفته در داده‌ها را به صورت یک یا چند عدد شاخص درآورد تا بتوان ویژگی‌های داده‌ای را به سادگی مطالعه کرد و گزارش داد. میانگین و میانه از معیارهای گرایش به مرکز است.

میانگین: میانگین متوسط یا مرکز ثقل داده‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{X} = \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}{N}$$

که در آن x_i داده‌ها و N برابر با تعداد کل داده‌ها است.

میانه: پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است میانه می‌نامیم و آن را با $Q_۲$ نشان می‌دهیم.

چارک اول و سوم: میانه، داده‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کند. دسته داده‌های کوچکتر از میانه و دسته داده‌های بزرگ‌تر از میانه. به میانه دسته داده‌های اول چارک اول $Q_۱$ و به میانه دسته داده‌های دوم چارک سوم $Q_۳$ می‌گوییم.

نکته: در صورت وجود داده دور افتاده در میان داده‌ها از میانه به جای میانگین استفاده می‌کنیم.

معیارهای پراکندگی: معیارهای گرایش به مرکز اطلاعاتی پیرامون مرکز داده‌ها در اختیار ما قرار می‌دهند، گاه در توصیف داده‌ها لازم است از چگونگی پراکندگی آنها نیز اطلاعات داشته باشیم. دامنه تغییرات، واریانس و انحراف معیار از معیارهای پراکندگی هستند.

دامنه تغییرات: اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها را نشان می‌دهد و با R نمایش می‌دهیم.

واریانس: میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را واریانس می‌نامند.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{N}$$

واحد واریانس برابر با توان دوم واحد داده مورد نظر است.

جذر واریانس را انحراف معیار σ می‌نامیم.

ضریب تغییرات: نسبت انحراف معیار به میانگین را ضریب تغییرات می‌نامند و معمولاً به صورت درصد بیان می‌کنند.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

چند نکته مهم:

۱) مجموع داده‌ها برابر است با $n\bar{X}$.

۲) اگر تمام داده‌ها را a برابر کنیم و با b جمع کنیم میانگین نیز a برابر شده و با b جمع می‌شود.

$$\overline{aX + b} = a\bar{X} + b$$

۳) اگر به تمام داده‌ها مقدار b را اضافه کنیم دامنه تغییرات، واریانس و انحراف معیار تغییری نمی‌کند.

۴) اگر تمام داده‌ها را در a ضرب کنیم واریانس a^2 برابر و انحراف معیار $|a|$ برابر می‌شود و ضریب تغییرات، تغییری نمی‌کند.

۵) اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، دامنه تغییرات، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات صفر می‌شود و برعکس.

۱. اعداد ۱ تا ۹ را روی نه کارت می‌نویسیم و سه کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه هر سه عدد فرد باشند به شرط اینکه مجموع آنها فرد باشد.

۲. فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰/۵ باشد و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا ۰/۸ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از این تیم‌ها قهرمان خواهند بود؟

۳. می‌دانیم $P(B) = ۰/۳$ و $P(A \cup B) = ۰/۷$. اگر $P(A \mid B) = ۰/۵$ باشد، احتمال وقوع A چقدر خواهد بود؟

۴. دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد ظاهر شده در هر دو تاس مضرب ۴ است، احتمال اینکه هر دو عدد رو شده مضرب ۳ باشد چقدر است؟

۵. احتمال اینکه علی در درس ریاضی قبول شود ۰/۷ و احتمال اینکه در درس شیمی قبول شود ۰/۶ است. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) فقط در یکی از دروس قبول شود.

ب) در هیچ درسی قبول نشود.

۶. اگر $P(A) = \frac{۱}{۵}$ و $P(B') = \frac{۳}{۵}$ و $P(A \mid B) = \frac{۵}{۸}$ باشد، مقدار $P(A - B)$ و $P(A' \cap B')$ را به دست آورید.

۷. داده‌های زیر مربوط به نمرات ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس است. دامنه تغییرات، میانه، چارک اول و چارک سوم را در داده‌های زیر مشخص کنید.

۱۶ ، ۲۰ ، ۱۹ ، ۱۷ ، ۱۴ ، ۱۳ ، ۱۱ ، ۱۰ ، ۱۲ ، ۲۰ ، ۱۵ ، ۱۴ ، ۱۸

۸. میانگین و واریانس و ضریب تغییرات داده‌های زیر را به دست آورید.

۱۴ ، ۱۵ ، ۱۸ ، ۱۲ ، ۱۱

۹. اگر میانگین ۵ داده آماری ۱۴ و میانگین ۶ داده دیگر ۱۲ باشد؛

الف) میانگین ۱۱ داده با هم چقدر است؟

ب) اگر به این داده‌ها اعداد ۱۷ و ۱۵ را اضافه کنیم، میانگین همه داده‌ها چقدر می‌شود؟

۱۰. اگر میانگین و واریانس داده‌های $x_{۱۰}, \dots, x_۲, x_۱$ برابر با ۲۳ و ۱۶ باشد. ضریب تغییرات داده‌های $۲x_{۱۰} - ۵, \dots, ۲x_۲ - ۵, ۲x_۱ - ۵$ چقدر است؟