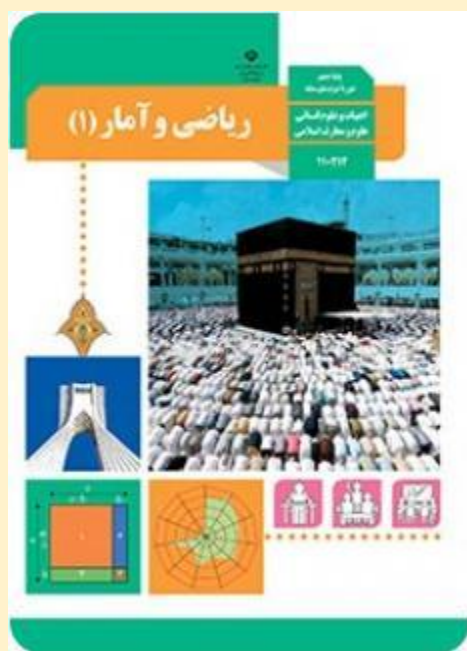


بسمه تعالی



آمار ۱

و

ریاضی

گروه آموزشی ریاضی لند

## خلاصه فصل معادله

**معادله درجه یک:** فرم کلی معادله درجه یک بصورت  $ax + b = 0$  است که  $a$  و  $b$  اعدادی حقیقی و  $a \neq 0$

می باشند. جواب معادله به صورت  $x = \frac{-b}{a}$  می باشد.

**معادله درجه دو:** فرم کلی معادله درجه دو بصورت  $ax^2 + bx + c = 0$  است که  $a$  و  $b$  و  $c$  اعدادی حقیقی و

$a \neq 0$  می باشند. روش های حل معادلات درجه دو بصورت زیر است:

**(۱) روش تجزیه:** در این روش ابتدا همه اجزای معادله را به سمت چپ تساوی منتقل کرده و سپس سمت چپ

تساوی را پس از ساده شدن، به کمک اتحادها و فاکتورگیری و دسته بندی تجزیه می کنیم. سپس با استفاده از نکته زیر معادله را حل می کنیم.

$$A \times B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

**تذکر:** دقت کنید که هر جزئی از معادله که از یک سمت تساوی به سمت دیگر آن منتقل شود، قرینه می شود.

**(۲) روش مربع کامل:** برای حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل مراحل زیر را پشت سر هم انجام می دهیم:

۱. اگر ضریب  $x^2$  عددی غیر از یک بود، ابتدا همه معادله را به آن تقسیم می کنیم.

۲. دو جمله شامل  $x$  و  $x^2$  را در سمت چپ تساوی نگه داشته و جمله ای که  $x$  ندارد را به سمت راست تساوی منتقل می کنیم.

۳. ضریب  $x$  را ابتدا به ۲ تقسیم نموده و سپس حاصل را به توان ۲ رسانده و عدد بدست آمده را به دو طرف تساوی اضافه می کنیم.

۴. طرف اول را بصورت توان دوم یک دو جمله ای (با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای) می نویسیم.

۵. از دو طرف جذر می گیریم. دقت کنید که بعد از جذر گرفتن، توان ۲ عبارت سمت چپ از بین رفته و در سمت راست دو مقدار با علامت های قرینه خواهیم داشت.

۶. سپس دو معادله بدست آمده را حل کرده و جوابهای معادله را می یابیم.

**نکته:** اگر قبل از مرحله جذرگیری، عدد سمت راست مثبت باشد، معادله دو جواب و اگر عدد سمت راست صفر باشد معادله یک جواب و اگر این عدد منفی باشد معادله جواب ندارد.

**(۳) روش کلی (دلته):** برای حل معادله  $ax^2 + bx + c$  به روش کلی مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱. ابتدا همه اجزای معادله را به سمت چپ منتقل کرده و در صورتی که نیاز به ساده شدن داشته باشند این کار را انجام می‌دهیم تا ضرایب معادله مشخص شوند. ( $a$  ضریب درجه ۲،  $b$  ضریب درجه یک و  $c$  عدد ثابت است).

۲. از فرمول  $\Delta = b^2 - 4ac$ ، مقدار دلته را محاسبه می‌کنیم.

۳. با استفاده از فرمول  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، مقدار  $x$  را می‌یابیم.

**نکته:** (۱) اگر  $\Delta > 0$  باشد، معادله دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز است.

(۲) اگر  $\Delta = 0$  باشد، معادله دارای یک ریشه حقیقی است که به آن ریشه مضاعف هم گفته می‌شود.

مقدار این ریشه را می‌توان از رابطه  $x = \frac{-b}{2a}$  بدست آورد.

(۳) اگر  $\Delta < 0$  باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

**نکته:** اگر  $\Delta \geq 0$  باشد، معادله دارای ریشه حقیقی است. (یعنی معادله یا یک ریشه حقیقی مضاعف دارد و

یا دو ریشه حقیقی متمایز دارد.)

**نکته:** معادله درجه دومی که ریشه‌های آن  $\alpha$  و  $\beta$  هستند را می‌توان از ساده کردن معادله زیر بدست آورد:

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

**مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دو بدون حل آن:**

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c$  که  $a \neq 0$  است، بدون حل معادله به ترتیب از روابط

$$P = \frac{c}{a} \text{ و } S = \frac{-b}{a}$$

بدست می‌آیند.

**معادلات گویا:** معادلات گویا به معادلات کسری با صورت و مخرج‌های چند جمله‌ای بر حسب متغیر  $x$  گفته

می‌شوند. برای حل معادلات گویا باید مراحل زیر را به ترتیب انجام دهیم:

(۱) همه اجزای معادله را به طرف اول تساوی منتقل می‌کنیم.

(۲) بین همه کسرها، مخرج مشترک گرفته و صورتها را مطابق مخرج مشترک، تغییر می‌دهیم و ساده می‌کنیم

تا بصورت  $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$  درآید.

(۳) معادله  $p(x) = 0$  را حل می‌کنیم.

(۴) جوابهایی را می‌پذیریم که هیچ کدام از مخرج‌ها را صفر نکند.

Riazyland - Group

۱. معادله  $\frac{1-3x}{8} - x - \frac{5}{2} = 0$  را حل کنید.

۲. معادلات زیر را با روش تجزیه حل کنید.

الف)  $-x^2 - 12x + 28 = 0$

ب)  $(2x+1)^2 - (7-x)^2 = 0$

۳. معادله الف را با روش مربع کامل و ب را با روش کلی حل کنید.

الف)  $2x^2 + 12x = -18$

ب)  $x^2 + \frac{1}{4} = -x$

۴. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش  $\frac{1}{4}$  و  $-3$  باشد.

۵. معادلات زیر را به روش‌های دلخواه حل کنید.

الف)  $x^2 - 15x = 0$

ب)  $2x^2 - 30x + 72 = 0$

۶. معادله  $3 = 2(x+2) - (x+2)^2$  را حل کنید.

۷. اگر یکی از جوابهای معادله  $2ax^2 + ax + 6 = 0$  برابر  $-2$  باشد، جواب دیگر معادله را بیابید.

۸. به ازای چه مقدار  $m$  معادله  $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$  فقط یک جواب دارد؟

۹. محیط مربعی که طول قطرش  $2\sqrt{7}$  است، چقدر است؟

۱۰. معادلات گویای زیر را حل کنید.

الف)  $\frac{1}{x} - x = -1$

ب)  $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{5}{2}$

## خلاصه فصل تابع

**زوج مرتب:** دوتایی  $(a, b)$  که ترتیب قرار گرفتن  $a$  و  $b$  در آن اهمیت دارد، زوج مرتب نامیده می‌شود. به  $a$  مؤلفه اول و به  $b$  مؤلفه دوم گفته می‌شود. یکی از مهمترین مثالهای زوج مرتب، مختصات نقاط در دستگاه محورهاست.

**نکته:** زوج مرتبهای  $(a, b)$  و  $(b, a)$  با هم برابر نیستند.

**نکته:** دو زوج مرتب زمانی با هم برابرند که مؤلفه‌های اول آنها با هم و مؤلفه‌های دوم آنها با هم برابر باشند. به عبارت دیگر:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, c = d$$

**تعریف رابطه:** به هر مجموعه از زوج‌های مرتب، رابطه گفته می‌شود.

**تعریف تابع:** یک تابع از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$ ، رابطه‌ای است که در آن به هر عضو  $A$  دقیقاً یک عضو  $B$  نسبت داده می‌شود.

**تعریف تابع به کمک زوج مرتب:** رابطه‌ای را تابع می‌گوئیم که در آن هیچ دو زوج مرتبی با مؤلفه‌های اول برابر و مؤلفه‌های دوم نابرابر وجود نداشته باشد.

**نکته:** اگر در یک رابطه، همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب متفاوت باشند، آن رابطه تابع است. اگر زوج‌های مرتبی با مؤلفه‌های اول یکسان وجود داشته باشند که مؤلفه‌های دوم آنها با هم برابر باشند، باز هم آن رابطه تابع است. اما اگر زوج‌های مرتبی با مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت وجود داشته باشند، آن گاه آن رابطه تابع نیست.

**تعریف تابع به کمک جدول:** یک رابطه که بصورت جدولی بیان شده باشد در صورتی تابع است که مقادیر بالای جدول با هم برابر نباشند و در صورت برابر بودن، مقادیر پایین متناظر با آنها هم برابر باشند.

**تعریف تابع به کمک نمودار ون:** یک نمودار ون بین دو مجموعه  $A$  و  $B$  در صورتی تابع را نمایش می‌دهد که در آن از هر عضو  $A$  دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.

**نکته:** اگر از یک یا چند مؤلفه از مجموعه  $A$  در نمودار پیکانی، پیکان خارج نشده باشد، آن رابطه تابع نیست.

**نکته:** تعداد پیکان‌های وارد شده به مؤلفه‌های  $B$  نقشی در تابع بودن یا نبودن ندارد.

**تعریف تابع به کمک نمودار مختصاتی:** یک نمودار در صفحه محورهای مختصات در صورتی یک تابع را نمایش می‌دهد که هیچ دو نقطه‌ای از آن روی یک خط موازی محور  $y$  ها قرار نگرفته باشند. به عبارت دیگر نموداری تابع است که هر خط موازی محور  $y$  ها، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند.

**تعریف دامنه و برد:** به مجموعه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل دهنده یک تابع، دامنه و به مجموعه مؤلفه‌های دوم، برد گفته می‌شود و آنها را به ترتیب با  $D$  و  $R$  نمایش می‌دهند.

**ضابطه تابع:** ضابطه یک تابع بیان‌کننده قانونی است که بین مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های تشکیل دهنده یک تابع برقرار است. به عبارت دیگر برای تابع  $f$ ،  $y = f(x)$  ضابطه تابع  $f$  نامیده می‌شود.

به عنوان مثال  $y = f(x) = 2x - 1$  قانون یا ضابطه تابع  $f$  را نشان می‌دهد که به کمک آن می‌توان برای هر مقدار  $x$ ،  $y$  مربوط به آن را بدست آورد.

**تابع خطی:** اگر ضابطه یک تابع به صورت  $f(x) = mx + h$  باشد، به آن تابع خطی گفته می‌شود. واضح است که نمودار یک تابع خطی در دستگاه مختصات، بصورت یک خط است.

**نکته:** برای رسم یک تابع خطی، کفایت به کمک جدول، ۲ نقطه از آن مشخص کرده و به هم وصل کنیم.

**شیب خط:** شیب یک خط که از نقاط  $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$  می‌گذرد برابر است با:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

**عرض از مبدأ خط:** عرض از مبدأ یک خط برابر است با عرض نقطه تقاطع خط با محور  $y$  ها، به عبارت دیگر عرض از مبدأ، عرض نقطه‌ای از خط است که طول آن صفر است.

**نکته:** برای پیدا کردن ضابطه یک تابع خطی که دو نقطه از آن معلوم است، کافیست فرم کلی تابع خطی را بصورت  $f(x) = mx + h$  در نظر گرفته و مختصات آن دو نقطه را در ضابطه تابع صدق دهیم. در اینصورت با حل دستگاه دو معادله دو مجهول بدست آمده می‌توانیم  $m$  و  $h$  را بدست آورده و ضابطه را مشخص کنیم.

**تابع سود:** اگر تابع درآمد یک شرکت تولیدی را  $R(x)$  و تابع هزینه آن را  $C(x)$  در نظر بگیریم، تابع سود بصورت  $f(x) = R(x) - C(x)$  بدست می‌آید.

**تابع درجه ۲ (سهمی):** ضابطه یک تابع درجه دوم بصورت  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) است، که به آن سهمی نیز می‌گویند.

(۱) اگر  $a > 0$ ، دهانه سهمی رو به بالا و اگر  $a < 0$ ، دهانه سهمی رو به پایین خواهد بود.

(۲) به نقطه‌ای که بالاترین یا پائین‌ترین نقطه روی نمودار سهمی است، رأس سهمی گفته می‌شود. طول رأس

سهمی از رابطه  $x = \frac{-b}{2a}$  و عرض آن با جایگذاری در معادله سهمی بدست می‌آید. عرض رأس سهمی را می‌توان از رابطه  $y = \frac{-\Delta}{4a}$  هم بدست آورد.

(۳) نمودار سهمی، متقارن است و محور تقارن دارد. معادله خط تقارن سهمی بصورت  $x = x_0$  است که  $x_0$  همان طول رأس سهمی است.

**رسم سهمی:** برای رسم نمودار یک سهمی، کافیست یک جدول تشکیل داده و رأس سهمی را در وسط این جدول قرار دهیم. دو مقدار  $x$  در سمت چپ  $x_0$  و دو مقدار در سمت راست  $x_0$  در جدول قرار داده و  $y$  های متناظر با آنها را می‌یابیم. سپس این ۵ نقطه را در دستگاه محورهای مختصات مشخص نموده و به هم وصل می‌کنیم.

**نکته:** در صورتی که رأس سهمی، بالاترین نقطه در سهمی باشد (یعنی دهانه سهمی رو به پایین باشد) به آن نقطهٔ ماکسیمم گفته می‌شود و در صورتی که رأس سهمی، پایین‌ترین نقطه در سهمی باشد (یعنی دهانه سهمی رو به بالا باشد) به آن نقطه مینیمم گفته می‌شود.

**نکته:** مقدار ماکسیمم یا مقدار مینیمم برابر است با عرض نقطه ماکسیمم یا مینیمم در سهمی.



۱. کدام یک از رابطه‌های زیر تابع هستند؟

الف) رابطه‌ای که به هر شهر، نماینده آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد.

ب) رابطه‌ای که به هر مسلمان قبله‌اش را نسبت می‌دهد.

ج) رابطه‌ای که به هر مثلث، محیط آن را نسبت می‌دهد.

د) رابطه‌ای که به دانش‌آموز، کتاب درسی‌اش را نسبت می‌دهد.

۲. اگر مجموعه  $A = \{-1, 2, \frac{1}{2}\}$  دامنه تابع  $f(x) = \frac{x+1}{x}$  باشد، برد تابع  $f$  را تعیین کنید.

۳.  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که رابطه  $f$  یک تابع باشد:

$$f = \{(5, 8), (6, 7), (a, 0), (6, a^2 - 2), (5, b - 10), (3, 2)\}$$

۴. اگر  $f$  یک تابع خطی باشد که  $f(1) = 3$  و  $f(-2) = 4$ ، آنگاه  $f(5)$  را بیابید.

۵. نمودار تابع خطی  $f(x) = 2x - 1$  را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

۶. نمودار تابع خطی  $f$  از مبدأ محورهای مختصات می‌گذرد. اگر  $f(2) = 6$  باشد، در این صورت اختلاف

$f(0/1)$  و  $f(-0/1)$  را بیابید.

۷. اگر  $f = \{(5, 2n + m), (3, 4), (5, 7), (3, n + 2m)\}$  تابع باشد،  $m^2 + n^2$  را بیابید.

۸. الف) شیب خطی را که از دو نقطه  $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  می‌گذرد بیابید.

ب) شیب خط  $2x + 3y = 4$  را بدست آورید.

۹. رأس سهمی  $y = 2(x - 1)^2 + 1$  را مشخص کنید و نمودار سهمی را به کمک ۵ نقطه رسم کنید.

۱۰. تابع درآمد یک کارگاه تولیدی  $R(x) = 200x$  و تابع هزینه آن بصورت  $C(x) = x^2 + 40x + 100$

است، که  $x$  تعداد کالای تولید شده می‌باشد. تابع سود را بنویسید و بگویید با تولید چند کالا، این کارگاه به

ماکزیمم سود خود می‌رسد؟

## خلاصه فصل کار با داده‌های آماری قسمت ۱

**داده:** واقعیت‌هایی درباره یک چیز که در محاسبه، استنباط یا برنامه‌ریزی بکار می‌روند.

**واحد آماری:** به هر یک از افراد یا اشیاء که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری شده‌اند، واحد آماری گفته می‌شود.

**جامعه آماری:** به مجموعه کل واحدهای آماری، جامعه آماری می‌گویند.

**نمونه آماری:** هر زیر مجموعه از جامعه آماری را که با روش مشخصی انتخاب شده باشد، نمونه آماری می‌نامند.

**نمونه تصادفی:** یک نمونه آماری که در آن همه اعضای جامعه، شانس انتخاب یکسان در نمونه را داشته باشند، نمونه تصادفی می‌نامند.

**آمارگیری:** به گردآوری و جمع‌آوری داده‌ها با یکی از روش‌های ممکن، آمارگیری می‌گویند.

**آمارگیر:** به کسی که کار آمارگیری را انجام می‌دهد، آمارگیر می‌گویند.

### روش‌های گردآوری داده‌ها:

(۱) مشاهده (۲) مصاحبه (۳) پرسش‌نامه (۴) دادگان‌ها

**سرشماری:** اگر در مصاحبه یا پرسش‌نامه، از کل افراد جامعه استفاده شود، به آن سرشماری گفته می‌شود.

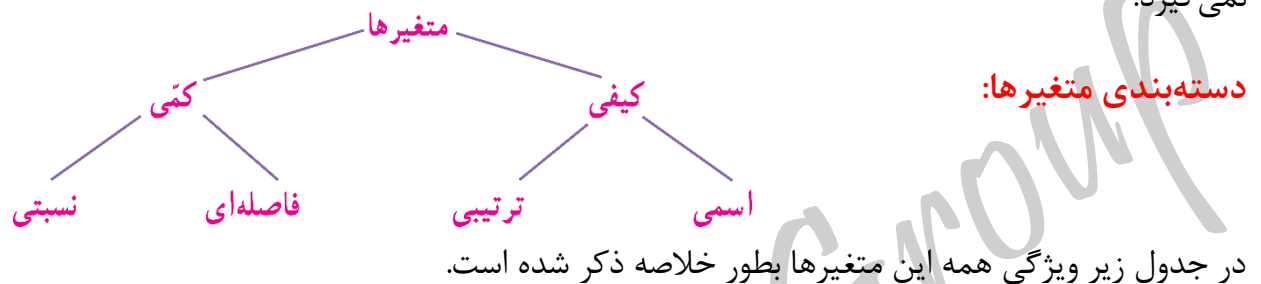
**پارامتر:** مشخصه عددی است که یک جنبه خاص از جامعه را توصیف می‌کند. پارامتر در صورت وجود منحصر به فرد است.

**آماره:** مشخصه عددی است که یک جنبه خاص از نمونه را توصیف می‌کند. آماره از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کند، پس منحصر به فرد نیست.

**متغیر:** به هر ویژگی از اشخاص یا اشیاء که قرار است بررسی شود، متغیر گفته می‌شود.

**متغیر کمی:** متغیری است که مقادیر عددی می‌گیرد و برای آن عملیات ریاضی از قبیل جمع، تفریق و معدل‌گیری قابل انجام است.

**متغیر کیفی:** متغیری است که صرفاً برای دسته بندی افراد یا اشیاء در گروه‌ها بکار می‌رود و لزوماً مقدار عددی نمی‌گیرد.



متغیر		قابل مرتب کردن	اختلاف مقادیر با معنی است	نسبت مقادیر با معناست
کیفی	اسمی	✗	✗	✗
	ترتیبی	✓	✗	✗
کمی	فاصله‌ای	✓	✓	✗
	نسبتی	✓	✓	✓

**معیارهای گرایش به مرکز:** میانگین - میانه - مد

(۱) **میانگین:** میانگین  $n$  داده  $x_1, x_2, \dots, x_n$  بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

**میانگین وزن دار:** میانگین داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  که به ترتیب ضرایب  $m_1, m_2, \dots, m_n$  را داشته باشند، بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\bar{x} = \frac{(x_1 m_1) + (x_2 m_2) + \dots + (x_n m_n)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

**میانگین در جدول فراوانی:** برای داده‌های جدولی زیر میانگین بصورت زیر محاسبه می‌شود:

داده‌ها	فراوانی
$x_1$	$f_1$
$x_2$	$f_2$
$\vdots$	$\vdots$
$x_n$	$f_n$

$$\bar{x} = \frac{(x_1 f_1) + (x_2 f_2) + \dots + (x_n f_n)}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

**میانگین برای داده‌های دسته‌بندی شده:** برای داده‌های دسته‌بندی شده، از مرکز دسته به عنوان  $x$  استفاده کرده و از فرمول بالا میانگین را محاسبه می‌کنیم.

**(۲) میانه:** میانه، عددی است که تعداد داده‌های قبل و بعد از آن، در لیست داده‌های مرتب شده، برابر باشد. توجه کنید که ابتدا باید داده‌ها را مرتب کرده و سپس میانه را بدست آورید. اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده وسط میانه است و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو داده وسط را به عنوان میانه معرفی می‌کنیم.

**(۳) مد:** داده‌ای است که بیشترین تکرار را در میان داده‌ها دارد.

۱. در بررسی جنسیت دانشجویان یک دانشگاه به این نتیجه رسیدند که  $\frac{2}{5}$  دانشجویان مرد هستند. با بررسی‌های بیشتر متوجه شدند که در دانشکده ادبیات  $\frac{5}{7}$  دانشجویان خانم هستند. در این بررسی پارامتر و آماره را مشخص کنید.

۲. در یک کارخانه روزانه ۵۰۰ کالا تولید می‌شود. برای بررسی کیفیت این کالاها یک نمونه ۲۰۰ تایی انتخاب می‌کنیم. در بررسی این ۲۰۰ کالا، ۲۰ عدد کالای معیوب کشف شد. حدوداً چند درصد کالاهای تولیدی این کارخانه سالم هستند؟ عدد بدست آمده آماره است یا پارامتر؟ چرا؟

۳. برای داده‌های ۵، ۱۰، ۱۲، ۱۲، ۱۵، ۱۸ موارد زیر را بیابید:

الف) میانه (ب) مد (ج) میانگین

۴. میانگین سن علی و دوستانش ۲۴ سال است. چنانچه سن دوستانش به ترتیب ۱۸، ۲۰، ۲۸، ۳۰ باشد، سن علی را بیابید.

۵. نمرات یک دانش‌آموز در ۵ درس به صورت زیر است. معدل او را در این دروس محاسبه کنید.

نمره	۱۷/۵	۱۸	۱۹	۲۰	۱۸
ضریب	۲	۴	۱	۳	۳

۶. نمرات ۷ دانش‌آموز در دو کلاس A و B به صورت زیر است. اختلاف میانه‌های نمرات در دو کلاس را بدست آورید.

A کلاس: ۱۱، ۷، ۱۸، ۲۰، ۱۰، ۱۳، ۱۴

B کلاس: ۱۰، ۱۹، ۱۴، ۱۶، ۱۱، ۹، ۷

۷. در داده‌های مرتب شده زیر، دامنه و دامنه میان چارکی را بیابید.

۱، ۷، ۸، ۸، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۹، ۲۰، ۲۰

۸. در داده‌های جدولی زیر، میانگین و میانه را بیابید.

داده	فراوانی
۹	۳
۱۱	۱
۱۳	۴
۱۵	۴

۹. میانگین نمرات کلاس  $A$  با ۱۲ دانش‌آموز  $۱۸/۵$  و میانگین نمرات کلاس  $B$  با ۱۳ دانش‌آموز ۱۷ می‌باشد.

میانگین نمرات دو کلاس رو هم چقدر است؟

۱۰. در ۴۵ داده آماری، مقدار میانگین ۱۱۲۴ محاسبه شده است. در بررسی مجدد داده‌ها متوجه شدیم که به

جای داده ۱۰۲۴، عدد ۱۲۰۴ محاسبه شده است. با رفع این اشتباه، میانگین واقعی را بیابید.

## خلاصه فصل کار با داده‌های آماری قسمت ۲

**داده دور افتاده:** داده‌ای که نسبت به سایر داده‌ها، خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد را داده دور افتاده می‌گویند.

**نکته:** اگر در داده‌ها، داده دور افتاده وجود داشته باشد، میانه نسبت به میانگین شاخص مرکزی بهتری می‌باشد.

**نکته:** میانگین تعدادی فرد از اعداد متوالی، عدد وسطی می‌باشد. این نکته در مورد اعداد زوج یا فرد متوالی هم صادق است.

**نکته:** اگر همه داده‌ها در عددی ضرب شوند و یا با عددی جمع شوند، میانه و میانگین نیز در همان عدد ضرب یا جمع می‌شوند:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{میانگین} = \bar{x}$$

$$ax_1, ax_2, \dots, ax_n \quad \text{میانگین} = a\bar{x} + b$$

**معیارهای پراکندگی:** این معیارها نحوه و میزان پراکندگی داده‌ها را مشخص می‌کنند که عبارتند از: دامنه تغییرات، واریانس، انحراف معیار و دامنه میان چارکی.

**(۱) دامنه تغییرات:** دامنه تغییرات ساده‌ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین داده را نشان می‌دهد و آن را با  $R$  نمایش می‌دهیم:

$$R = b - a$$

**نکته:** اگر همه داده‌ها با عددی جمع شوند دامنه تغییرات تغییری نمی‌کند، اما اگر همه داده‌ها در عددی ضرب شوند دامنه تغییرات هم در آن عدد ضرب می‌شود.

**نکته:** با توجه به این که دامنه تغییرات تنها به بزرگترین و کوچکترین داده وابسته است و با تغییر تعداد و مقدار داده‌های میانی، عوض نمی‌شود، پس این معیار نمی‌تواند بیانگر خوبی برای پراکندگی داده‌ها باشد.

**(۲) واریانس:** میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را واریانس نامیده و آن را با نماد  $\sigma^2$  نمایش می‌دهند:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

داده	فراوانی
$x_1$	$f_1$
$x_2$	$f_2$
$\vdots$	$\vdots$
$x_n$	$f_n$

**واریانس داده‌های جدولی:** برای داده‌های جدولی زیر واریانس بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

**نکته:** در محاسبه واریانس برای داده‌های دسته‌بندی شده از مرکز دسته به عنوان  $x$  استفاده می‌شود.

**نکته:** در محاسبه واریانس برای داده‌های وزن‌دار (ضریب‌دار) از وزن به عنوان فراوانی استفاده می‌شود.

**نکته:** مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین، برابر صفر است:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$$

**نکته:** واریانس، پراکندگی داده‌ها حول میانگین را بیشتر از حد واقعی نشان می‌دهد، زیرا در محاسبه

واریانس از توان دو استفاده می‌شود.

**(۳) انحراف معیار:** جذر واریانس را انحراف معیار نامیده و آن را با نماد  $\sigma$  نمایش می‌دهند:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

**نکته:** چون انحراف معیار از جذر واریانس بدست می‌آید، پس نسبت به واریانس برتری دارد.

**نکته:** اگر همه داده‌ها برابر باشند، انحراف معیار صفر است و برعکس اگر انحراف معیار صفر باشد، همه

داده‌ها برابرند.



**نکته:** اگر همه داده‌ها در عددی ضرب شوند، واریانس در توان دوم آن عدد و انحراف معیار در قدر مطلق آن عدد ضرب می‌شوند:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{انحراف معیار} = \sigma \quad \text{واریانس} = \sigma^2$$

$$ax_1, ax_2, \dots, ax_n \quad \text{انحراف معیار} = |a|\sigma \quad \text{واریانس} = a^2\sigma^2$$

**نکته:** اگر همه داده‌ها با عددی جمع شوند، تغییری در واریانس و انحراف معیار رخ نمی‌دهد:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{انحراف معیار} = \sigma \quad \text{واریانس} = \sigma^2$$

$$x_1 + b, x_2 + b, \dots, x_n + b \quad \text{انحراف معیار} = \sigma \quad \text{واریانس} = \sigma^2$$

**چارک اول و سوم:** میانه اعداد قبل از میانه را چارک اول ( $Q_1$ ) و میانه اعداد بعد از میانه را چارک سوم ( $Q_3$ ) می‌نامند.

**(۴) دامنه میان چارکی:** اختلاف چارک اول و سوم را دامنه میان چارکی می‌نامند و آن را با  $IQR$  نمایش می‌دهند:

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

**نکته:** اگر در داده‌ها، داده دور افتاده وجود داشته باشد، از میانه به جای میانگین و از دامنه میان چارکی به جای انحراف معیار استفاده می‌کنند.

**نکته:**

۱. تقریباً ۶۸ درصد از مشاهدات در فاصله یک انحراف معیار از میانگین هستند.  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$
۲. تقریباً ۹۶ درصد از مشاهدات در فاصله دو انحراف معیار از میانگین هستند.  $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$
۳. تقریباً ۹۹/۹ درصد از مشاهدات در فاصله سه انحراف معیار از میانگین هستند.  $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$

۱. دامنه تغییرات داده‌های زیر را بیابید.

۱۰، ۱۲، ۵۰، ۲، ۲۰، ۱۵

۲. اگر دامنه تغییرات داده‌های  $a, b, c, d$  برابر ۲۰ باشد، دامنه تغییرات داده‌های  $\frac{c}{4} + 3, \frac{d}{4} + 3$ ،

$\frac{a}{4} + 3, \frac{b}{4} + 3$  چقدر می‌شود؟

۳. واریانس و انحراف معیار داده‌های زیر را بیابید.

۱۰، ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۴۰

۴. انحراف معیار داده‌های زیر را بیابید.

۱، ۱، ۳، ۹، ۷، ۴، ۳

۵. در داده‌های زیر، انحراف معیار داده‌های کمتر از میانگین را بیابید.

داده	۱	۲	۳	۴	۵
فراوانی	۱	۲	۳	۲	۱

۶. اگر میانگین داده‌های  $2a, 2a + 1$  و  $a$  برابر ۱۲ باشد، واریانس آنها را بیابید.

۷. واریانس چند داده آماری ۵ و میانگین آنها ۱۰ است. اگر داده‌ها را ۳ برابر کرده و با ۲ جمع کنیم، واریانس و

میانگین داده‌های جدید را بیابید.

۸. در ۶۰ داده آماری، میانگین ۳ و انحراف معیار  $\frac{1}{2}$  محاسبه شده است. اگر به تمام داده‌ها ۹ واحد اضافه شود،

نسبت انحراف معیار جدید به میانگین جدید را بیابید.

۹. اگر انحراف معیار داده‌های  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  برابر ۳ باشد،

واریانس داده‌های  $2x_1 + 2, 2x_2 + 2, 2x_3 + 2, 2x_4 + 2, 2x_5 + 2$  چقدر است؟

۱۰. انحراف معیار داده‌های بین چارک اول و سوم را برای داده‌های آماری زیر بیابید.

۹، ۱۱، ۱۱، ۱۲، ۱۴، ۱۴، ۱۵، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸