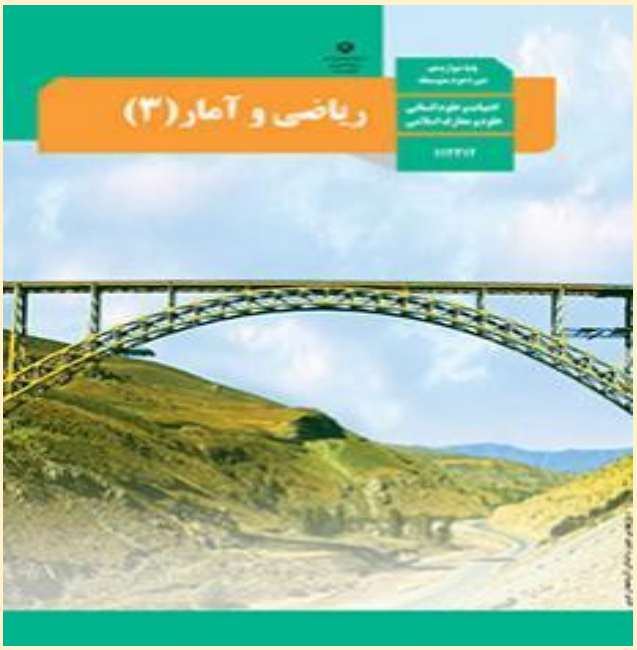
بسمه تعالی



ریاضی و آمار ۳

گروه آموزشی ریاضی لند

خلاصه فصل دنباله

دنباله: اگر تابعی از مجموعه اعداد طبیعی به $\mathbb{R}$ باشد اعضای برد این تابع می‌تواند دنباله‌ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب جمله اول آن را با $a(۱)$ یا $a_۱$ ، جمله دوم را با $a(۲)$ یا $a_۲$ و ... جمله n ام آن را با $a(n)$ یا a_n نشان می‌دهیم.

جمله n ام دنباله، a_n را جمله عمومی دنباله یا ضابطه دنباله می‌نامند.

دنباله بازگشتی: رابطه‌ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است را رابطه بازگشتی می‌نامیم و دنباله را دنباله بازگشتی می‌نامیم. به طور مثال: $a_{n+۱} = a_n + ۲$

رسم نمودار دنباله‌ها: هر تابعی نمودار دارد و دنباله هم تابعی است که دامنه آن اعداد طبیعی است. برای رسم نمودار یک دنباله از $n = ۱$ شروع می‌کنیم و به جای n عدد یک را می‌گذاریم و مقدار $a_۱$ را به دست می‌آوریم و همین طور ادامه می‌دهیم. این نقاط را روی محور مشخص می‌کنیم و نمودار دنباله را به دست می‌آوریم.

تذکر: یک سری از دنباله‌ها را هم با رابطه بازگشتی و هم با ضابطه‌ی تابعی دنباله می‌توانیم نشان دهیم، مانند دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی و ...

دنباله حسابی: یک دنباله حسابی، دنباله‌ای به صورت:

$$a\ ,a+d\ ,a+۲d\ ,\ldots$$

است که در آن a جمله اول و d عدد ثابت (اختلاف مشترک) جملات دنباله است. جمله n ام این دنباله با رابطه $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ نشان داده می‌شود.

تذکر: برای تشخیص دنبالهٔ حسابی اختلاف هر دو جمله متوالی را به دست می‌آوریم. اگر این اختلاف‌ها مقدار ثابتی باشد آن دنباله یک دنباله حسابی است.

کلیه حقوق این اثر متعلق به گروه ریاضی لند می‌باشد و هر گونه استفاده از آن بدون ذکر نام *Riazyland* پیگرد قانونی دارد.

نکته: اگر جملهٔ عمومی یک دنباله حسابی را بنویسیم یک معادلهٔ خط خواهد شد. هر دنبالهٔ حسابی یک تابع خطی است که شیب خط، همان اختلاف مشترک جملات دنباله است.

نکته: به میانگین دو عدد a و b واسطه حسابی آن دو عدد می‌گوییم.

$$a\ ,\ \frac{a+b}{۲}\ ,\ b$$

نکته: اگر جمله a_n و a_m دنباله را داشته باشیم اختلاف مشترک دنباله از رابطه $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$ به دست می‌آید.

مجموع جملات دنباله حسابی: مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از یکی از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n) \quad \text{یا} \quad S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$

Riazyland_Group

کلیه حقوق این اثر متعلق به گروه ریاضی لند می‌باشد و هر گونه استفاده از آن بدون ذکر نام *Riazyland* پیگرد قانونی دارد.

خلاصه فصل الگوهای غیرخطی ـ دنباله هندسی

دنباله هندسی: یک دنباله هندسی، دنباله‌ای به صورت:

$$a\ ,ar\ ,ar^{۲}\ ,\ ...$$

است که در آن $a \neq ۰$ جمله اول و $r \neq ۰$ نسبت مشترک دنباله است. جمله n ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_۱ r^{n-۱}$ به دست می‌آید.

تذکر: در دنباله هندسی، جمله‌های دنباله از ضرب یک مقدار ثابت در جمله قبلی‌اش به دست می‌آید.

نکته: با توجه به مقدار r دنبالهٔ هندسی ممکن است افزایشی یا کاهشی یا نه افزایشی نه کاهشی باشد.

$r > ۱$ و $a > ۰$ افزایشی، $r < ۰$ و $a > ۰$ نه افزایشی و نه کاهشی

$r > ۱$ و $a < ۰$ کاهشی، $r < ۰$ و $a < ۰$ نه افزایشی و نه کاهشی

در حالتی که $۰ < r < ۱$ باشد وقتی $a > ۰$ کاهشی و وقتی $a < ۰$ افزایشی خواهد بود.

نکته: دنباله هندسی یک دنباله بازگشتی است.

$$a_{n+۱} = ra_a \quad \text{و} \quad a_۱ = \text{معلوم}$$

نکته: نیمه عمر دارویی در پزشکی مهم است. نیمه عمر یک دارو، مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو می‌رسد.

در حل مسایل نیمه عمر، میزان دارو موجود را تقسیم بر ۲ می‌کنیم.

واسطه هندسی: در دنباله هندسی c و b و a به عدد b واسطه هندسی می‌گوییم. واسطه هندسی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$b^{۲} = ac \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{ac}$$

کلیه حقوق این اثر متعلق به گروه ریاضی لند می‌باشد و هر گونه استفاده از آن بدون ذکر نام Riazyland پیگرد قانونی دارد.

نکته: اگر بخواهیم میان دو عدد a و b تعداد n واسطهٔ هندسی درج کنیم از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

تذکر: در رابطه‌هایی که عدد توان‌دار دارد مثل فرمول بالا، برای به دست آوردن r می‌بایست از تجزیه اعداد به عامل‌های اول استفاده کنیم.

مجموع جملات دنباله هندسی: در دنبالهٔ هندسی که a جمله اول و r نسبت مشترک است، مجموع جملات از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = a\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

Riazyland_Group

کلیه حقوق این اثر متعلق به گروه ریاضی لند می‌باشد و هر گونه استفاده از آن بدون ذکر نام *Riazyland* پیگرد قانونی دارد.

خلاصه قسمت ریشه nام و توان گویا و تابع نمایی

عدد توان‌دار a^m: به این معنا است که عدد a به تعداد m بار در خودش ضرب می‌شود.

$$a^m = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ بار}}$$

در اعداد توان‌دار قوانین زیر برقرار است:

۱) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

۲) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

۳) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$

۴) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

۵) $(a^m)^n = a^{mn}$

۶) $a^{\circ} = ۱ \quad (a \neq ۰) \quad , \quad a^{۱} = a \quad , \quad a^{-n} = \frac{۱}{a^n}$

ریشه n ام: اگر $n \geq ۲$ و طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می‌نامیم هر گاه $b^n = a$.

اگر $b^n = a$ و n زوج باشد، ریشه‌های n ام عدد a برابر $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است.

اگر $b^n = a$ و n فرد باشد ریشه n ام عدد a برابر $\sqrt[n]{a}$ است. اگر a مثبت باشد ریشه n ام مثبت و اگر a منفی باشد ریشه n ام منفی است.

نکته: هر گاه $a > ۰$ برای دو عدد طبیعی m و n، $a^{\frac{m}{n}}$ را تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

تذکر: توجه کنید در ریشه‌یابی اعداد می‌بایست عددها را به عامل‌های اول تجزیه کنیم و آن‌ها را به صورت توان‌دار بنویسیم. سپس با توجه به عدد توان‌دار ایجاد شده، ریشه بگیریم.

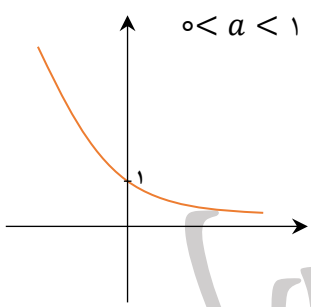
کلیه حقوق این اثر متعلق به گروه ریاضی لند می‌باشد و هر گونه استفاده از آن بدون ذکر نام Riazyland پیگرد قانونی دارد.

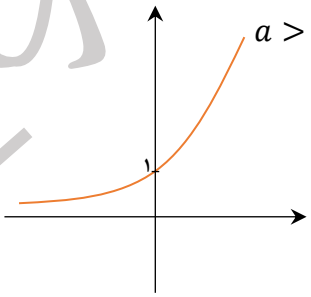
تابع نمایی: هر تابع به صورت $y = a^x$ که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی می‌نامیم.

نکته: در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، وقتی x بزرگ می‌شود، مقدار y کاهش می‌یابد. (تابع نزولی)

نکته: در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > 1$ باشد وقتی x بزرگ شود مقدار y افزایش می‌یابد. (تابع صعودی)

تذکر: با توجه به نمودارهای تابع نمایی ویژگی‌های این تابع به شرح زیر است:





- تابع نزولی است.
- محور طول‌ها را قطع نمی‌کند.
- از نقطه $(0 , 1)$ می‌گذرد.
- دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(0 , +\infty)$ است.

- تابع صعودی است.
- محور طول‌ها را قطع نمی‌کند.
- از نقطه $(0 , 1)$ می‌گذرد.
- دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(0 , +\infty)$ است.

رشد نمایی: معادله کلی رشد نمایی، به صورت $f(t) = c(1 + r)^t$ که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان رشد و t بیانگر زمان است.

زوال نمایی: معادله کلی زوال نمایی، به فرم $f(t) = c(1 - r)^t$ که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول و t بیانگر زمان است.

کلیه حقوق این اثر متعلق به گروه ریاضی لند می‌باشد و هر گونه استفاده از آن بدون ذکر نام *Riazyland* پیگرد قانونی دارد.